Intégration (corrigé niveau 1).

Calculs d'intégrales sur un segment et de primitives.

1. Calculer les intégrales suivantes.

a. $\int_0^1 \arctan(x).dx$, b. $\int_1^2 (\ln(2.x))^2.dx$, c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}.dx$,

d. $\int_0^1 (1-x^2).\arctan(x).dx$, e. $\int_0^1 \frac{dt}{i.t+1}$.

Tout d'abord, toutes les fonctions proposées sont continues sur les intervalles où on les intègre et les intégrales correspondantes existent.
De façon générale, dans la suite, on désigne toujours ces intégrales par I.
Puis :

a. On utilise une intégration par parties :

$$\int_0^1 \arctan(x).dx = [x.\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\ln(2),$$

b. Même technique :

$$\int_1^2 (\ln(2.x))^2.dx = \left[x.(\ln(2.x))^2\right]_1^2 - 2.\int_1^2 \ln(2.x).dx = 2.(\ln(4))^2 - (\ln(2))^2 - 2.\left[[x.\ln(2.x)]_1^2 - \int_1^2 dx\right],$$

soit finalement : $\int_1^2 (\ln(2.x))^2.dx = 7.(\ln(2))^2 - 6.\ln(2) - 1$

c. On coupe l'intégrale en deux puis on utilise des changements de variable :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}.dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{2-\sin^2(x)}.dx + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1+u^2},$$

où on a pose : $u = \cos(x)$, dans la deuxième partie qui donne :

$$\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1+u^2} = [\arctan(u)]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

Et la première partie, avec le changement de variable : $u = \sin(x)$, donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{2-\sin^2(x)}.dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{2-u^2} = \frac{1}{2.\sqrt{2}}.\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}-u} + \frac{1}{\sqrt{2}+u}\right).du = \frac{1}{2.\sqrt{2}}.\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2.\sqrt{2}}.\ln(3).$$

Finalement l'intégrale initiale vaut : $I = \frac{1}{2.\sqrt{2}}.\ln(3) + \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}$.

d. On commence par une intégration par parties, et :

$$\int_0^1 (1-x^2).\arctan(x).dx = \left[\left(x - \frac{x^3}{3}\right).\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(x - \frac{x^3}{3}\right).\frac{1}{1+x^2}.dx,$$

soit : $I = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}.\ln(2) + \frac{1}{3}.\int_0^1 \frac{x^3+x-x}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}.\ln(2) + \frac{1}{3}.\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}.\ln(2) + \frac{1}{6}$.

e. L'existence de l'intégrale est garantie par la définition et la continuité sur $[0,1]$ des fonctions partie réelle et partie
imaginaire, et on écrit :

$$\int_0^1 \frac{dt}{i.t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - i.\int_0^1 \frac{t.dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}.\ln(2).$$

2. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant les intervalles sur lesquels elles sont définies.

a. Calcul direct :

- $(e^x - 1)^2$.

b. Intégration par parties (pour commencer) :

- $(x^2+1).e^x.\cos(x)$,
- $x.\ln(x)$,
- $\ln(1+x^2)$,
- $\sin(x).\ln(1+\sin(x))$.

c. Changement de variable (pour commencer) :

- $\dfrac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$,
- $3^{\sqrt{2.x+1}}$,
- $\dfrac{\tan(x)}{1+\cos(x)}$.

a. Cette première fonction est définie et continue sur ℝ donc y admet des primitives, toutes égales entre elles à une constante additive près (ℝ est un intervalle).

Puis : $F(x)=\int (e^{2.x}-2.e^x+1).dx=\dfrac{e^{2.x}}{2}-2.e^x+x+C$, avec : $C\in\mathbb{R}$.

b. • La fonction admet des primitives sur ℝ, et pour les calculer, on peut utiliser la partie réelle d'une exponentielle puis des intégrations par parties, et :

$$F(x)=\int (x^2+1).\mathrm{Re}(e^{(1+i).x}).dx=\mathrm{Re}\left((\frac{1}{2}.(1-i).x^2+i.x-i).e^{(1+i).x}\right)+C,$$

soit : $F(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}.(\cos(x)+\sin(x))-x.\sin(x)+\sin(x)\right).e^x+C$, avec : $C\in\mathbb{R}$.

• La fonction étant définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle y admet des primitives et :

$$F(x)=\int x.\ln(x).dx=\frac{x^2}{2}.\ln(x)-\int\frac{x}{2}.dx=\frac{x^2}{2}.\ln(x)-\frac{x^2}{4}+C,\text{ avec : } C\in\mathbb{R}.$$

• La fonction est définie et continue sur ℝ et y admet des primitives :

$$F(x)=\int\ln(1+x^2).dx=x.\ln(1+x^2)-\int\frac{2.x^2}{1+x^2}.dx=x.\ln(1+x^2)-2.\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right).dx,$$

et finalement : $F(x)=x.\ln(1+x^2)-2.x+2.\arctan(x)+C$, avec : $C\in\mathbb{R}$.

• La fonction est définie et continue sur tout intervalle : $I_k=\left]-\dfrac{\pi}{2}+2.k\pi,\dfrac{3.\pi}{2}+2.k\pi\right[$, avec : $k\in\mathbb{Z}$,

et : $F(x)=\int\sin(x).\ln(1+\sin(x)).dx=-\cos(x).\ln(1+\sin(x))+\int\dfrac{\cos^2(x)}{1+\sin(x)}.dx$,

soit : $F(x)=-\cos(x).\ln(1+\sin(x))+\int(1-\sin(x)).dx=-\cos(x).\ln(1+\sin(x))+x+\cos(x)+C_k$,

où C_k est une constante réelle pour chaque intervalle.

c. • La première fonction est définie et continue sur chaque intervalle : $I_k=\left]-\dfrac{\pi}{2}+2.k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2.k\pi\right[$, pour : $k\in\mathbb{Z}$, et à l'aide du changement de variable : $u=\cos(x)$, on peut écrire :

$$\forall\ x\in I_k,\ F(x)=\int\frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}.dx=\int\frac{1-\cos^2(x)}{\sqrt{\cos(x)}}.\sin(x).dx=-\int\frac{1-u^2}{\sqrt{u}}.du.$$

D'où : $F(x)=-\int\dfrac{1-u^2}{\sqrt{u}}.du=-2.\sqrt{u}+\dfrac{2}{5}.u^{\frac{5}{2}}+C_k=-2.\sqrt{\cos(x)}+\dfrac{2}{5}.(\cos(x))^{\frac{5}{2}}+C_k$, avec : $C_k\in\mathbb{R}$.

• La fonction suivante est définie et continue sur $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, et y admet donc des primitives.

Puis : $F(x)=\int 3^{\sqrt{2.x+1}}.dx=\int u.e^{u.\ln(3)}.du$, avec le changement de variable : $u=\sqrt{2.x+1}$.

D'où : $F(x)=\int u.e^{u.\ln(3)}.du=\dfrac{u}{\ln(3)}.e^{u.\ln(3)}-\dfrac{1}{(\ln(3))^2}.e^{u.\ln(3)}+C=\left(\dfrac{\sqrt{2.x+1}}{\ln(3)}-\dfrac{1}{(\ln(3))^2}\right).3^{\sqrt{2.x+1}}+C$,

avec toujours : $C\in\mathbb{R}$.

• Enfin, pour cette fonction, elle est définie et continue sur les intervalles :

$\left]-\dfrac{\pi}{2}+2.k.\pi,+\dfrac{\pi}{2}+2.k.\pi\right[$, $\left]\dfrac{\pi}{2}+2.k.\pi,\pi+2.k.\pi\right[$ et : $\left]\pi+2.k.\pi,\dfrac{3.\pi}{2}+2.k.\pi\right[$, avec : $k\in\mathbb{Z}$.

Sur ces intervalles : $F(x)=\int\dfrac{\sin(x)}{\cos(x).(1+\cos(x))}.dx=-\int\dfrac{du}{u.(1+u)}$, avec : $u=\cos(x)$.

d'où : $F(x) = \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u} \right).du = \ln|u+1| - \ln|u| + C_k = \ln\left(\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)} \right) + C_k$,

où il y a une multitude de constantes : $C_k \in \mathbb{R}$.

3. Intégrales de Wallis.

Pour : $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t).dt$, et : $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t).dt$.

a. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ I_n = J_n$.

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante, à termes strictement positifs.

c. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ (n+2).I_{n+2} = (n+1).I_n$.

d. Déduire de cette égalité une expression de I_n en fonction de n (avec : $n = 2.p$, ou : $n = 2.p+1$).

e. Montrer que la suite ($(n+1).I_{n+1}.I_n$) est constante et préciser sa valeur.

f. En déduire un équivalent de I_n à l'infini et la limite de (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

a. Tout d'abord, I_n et J_n existent puisque les fonctions sous les intégrales sont définies et continues sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Puis on peut utiliser dans la deuxième intégrale le changement de variable : $u = \frac{\pi}{2} - t$, et :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ J_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right).du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u).du = I_n.$$

b. Pour cela : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1}(u) - \sin^n(u)).du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u).(\sin(u) - 1).du \leq 0$,

car la fonction sous l'intégrale est négative (et les bornes sont dans le bon sens).

De plus pour : $n \in \mathbb{N}$, la fonction dans l'intégrale définissant I_n est positive, continue et non nulle en $\frac{\pi}{2}$ donc I_n est strictement positive.

c. Soit n entier fixé.

Une intégration par parties donne :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(u).\sin(u).du = \left[-\cos(u).\sin^{n+1}(u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1).\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u).\cos^2(u).du.$$

En transformant le cosinus en sinus, on obtient : $I_{n+2} = 0 + (n+1).(I_n - I_{n+2})$, d'où le résultat.

d. Pour n pair : $n = 2.p \geq 2$, on peut écrire : $I_{2.p} = \frac{2.p-1}{2.p}.I_{2.p-2}$.

On propose alors, après tâtonnements : $\forall\ p \geq 0$, $I_{2.p} = \frac{2.p-1}{2.p}.\frac{2.p-3}{2.p-2}...\frac{1}{2}.I_0 = \frac{(2.p)!}{2^{2.p}.(p!)^2}.\frac{\pi}{2}$,

que l'on démontre ensuite proprement par récurrence.

De même, on obtient : $\forall\ p \geq 0$, $I_{2.p+1} = \frac{2.p}{2.p+1}.\frac{2.p-2}{2.p-1}...\frac{2}{3}.I_1 = \frac{2^{2.p}.(p!)^2}{(2.p+1)!}.1 = \frac{2^{2.p}.(p!)^2}{(2.p+1)!}$.

e. Il suffit de multiplier l'égalité obtenue en c par I_{n+1} pour avoir :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ (n+2).I_{n+2}.I_{n+1} = (n+1).I_{n+1}.I_n,$$

et constater ainsi que la suite proposée est bien constante.

La valeur constante cherchée est donc : $1.I_1.I_0 = \frac{\pi}{2}$.

f. On procède maintenant en deux étapes :

- la suite étant décroissante et strictement positive, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$,

puis en divisant par I_n (strictement positive), et en utilisant l'égalité du c, on obtient :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.

Le théorème des gendarmes montre alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, d'où : $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$.

• puis : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \dfrac{\pi}{2} = (n+1).I_n.I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} n.I_n^2$, d'où : $I_n^2 = \dfrac{\pi}{2.n}.(1+o_{+\infty}(1))$, et : $I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2.n}}.\sqrt{1+o_{+\infty}(1)}$.

On peut ainsi conclure que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2.n}}$.

Remarque : en partant de : $n! \underset{+\infty}{\sim} C.n^n.e^{-n}.\sqrt{n}$, et en utilisant cet équivalent dans l'égalité donnant $I_{2.p}$, par exemple, on peut en déduire que : $C = \sqrt{2.\pi}$, d'où la formule de Stirling.

Propriétés de l'intégrale sur un segment.

4. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f admet une unique primitive F sur $[a,b]$ telle que : $\int_a^b F(t).dt = 0$.

Notons F_a la primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a : $\forall\ x \in [a,b],\ F_a(x) = \int_a^x f(t).dt$.

Toute primitive de f sur $[a,b]$, s'écrit : $F = F_a + C$, avec : $C \in \mathbb{R}$.

Trouver F qui répond au problème revient donc à résoudre : $0 = \int_a^b F(t).dt = \int_a^b F_a(t).dt + C.(b-a)$.

Le problème a donc bien une unique solution, la primitive correspondant à la valeur : $C = -\dfrac{\int_a^b F_a(t).dt}{b-a}$.

5. Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\int_0^1 f(t).dt = \dfrac{1}{2}$.
Montrer à l'aide de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$, que f admet un point fixe.

La fonction g proposée est définie et continue sur $[0,1]$.
Si elle ne s'y annule pas, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'elle y garde un signe constant.
Supposons alors, quitte à la changer en son opposée, que g soit strictement positive sur $[0,1]$.

Alors étant de plus continue, on aurait : $\int_0^1 g(t).dt > 0$.

Or : $\int_0^1 g(t).dt = \int_0^1 f(t).dt - \int_0^1 t.dt = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$.

Conclusion : g s'annule sur $[0,1]$ et f admet bien un point fixe.

6. Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, non nulles, telles que : $\int_0^1 (f^2 + g^2 + 2.f^2g^2) = \int_0^1 2.(f+g).f.g$.
Montrer en utilisant $(f-1)$ et $(g-1)$ que : $f = g = 1$.

Sous l'hypothèse proposée, on a donc : $\int_0^1 (f^2 + g^2 + 2.f^2g^2 - 2.f^2g - 2.g.f^2) = 0$.

Sous l'intégrale apparaît la fonction : $f^2 + g^2 + 2.f^2g^2 - 2.f^2g - 2.g.f^2 = f^2.(g-1)^2 + g^2.(f-1)^2$.

Puisque cette fonction est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0,1]$, on en déduit que :

$$\forall\ x \in [0,1],\ \begin{cases} f(x) = 0,\ ou : g(x) = 1 \\ \qquad et \\ g(x) = 0,\ ou : f(x) = 1 \end{cases},$$

et donc : $\forall\ x \in [0,1],\ f(x) = g(x) = 0$, ou : $f(x) = g(x) = 1$.

Supposons alors qu'en une valeur a de $[0,1]$, on ait : $f(a) = 0$.

f étant supposée non nulle, il existe une valeur b dans $[0,1]$ où : $f(b) \neq 0$, donc telle que : $f(b) = 1$.

Mais alors le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f montre que : $\exists\ c \in [0,1],\ f(x)=\dfrac{1}{2}$,

ce qui n'est pas possible vue l'alternative précédente.

Conclusion : $\forall\ a \in [0,1],\ f(a)\neq 0$, donc d'après ce qui précède : $f(a)=1=g(a)$.

7. On note : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

 a. Avec un encadrement, montrer que (I_n) tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

 b. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\exists\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}=a+\frac{b}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

a. On peut commencer par écrire que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ |I_n-1|=\left|\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^n}-1\right).dx\right|\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}.dx\leq\int_0^1 x^n.dx=\frac{1}{n+1},$$

et le théorème des gendarmes garantit alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n-1)=0$, soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=1$.

b. En partant de l'expression de (I_n-1), on a encore :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ I_n-1=\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x^n}=\left[x.\frac{\ln(1+x^n)}{n}\right]_0^1-\frac{1}{n}.\int_0^1\ln(1+x^n).dx=\frac{\ln(2)}{n}-\frac{1}{n}.\int_0^1\ln(1+x^n).dx.$$

Mais de plus : $\left|\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^n).dx\right|\leq\int_0^1|\ln(1+x^n)|.dx=\int_0^1\ln(1+x^n).dx\leq\int_0^1 x^n.dx=\frac{1}{n+1}$,

et cette dernière quantité tend vers 0 en $+\infty$.

Donc : $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}=1+\frac{\ln(2)}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, soit le résultat voulu avec : $a=1,\ b=\ln(2)$.

8. Lemme de Lebesgue.

 Soit f une fonction de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

 A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t).\cos(n.t).dt=0$.

Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut écrire :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \int_a^b f(t).\cos(n.t).dt=\left[\frac{\sin(n.t)}{n}.f(t)\right]_a^b-\frac{1}{n}.\int_a^b f'(t).\sin(n.t).dt.$$

Donc, en notant M un majorant de $|f'|$ sur $[a,b]$, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\int_a^b f(t).\cos(n.t).dt\right|\leq\frac{|\sin(n.b)|}{n}.|f(b)|+\frac{|\sin(n.a)|}{n}.|f(a)|+\frac{1}{n}.\int_a^b|f'(t).\sin(n.t)|.dt\leq\frac{2.M}{n}+\frac{1}{n}.\int_a^b|f'(t)|.dt.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit bien que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t).\cos(n.t).dt=0$.

Fonctions définies à l'aide d'intégrales.

9. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

 On définit la fonction F par : $\forall\ x \in [0,1],\ F(x)=\displaystyle\int_0^1\min(x,t).f(t).dt$.

 a. En transformant l'écriture de F, montrer que F est de classe C^2 sur $[0,1]$ et calculer F''.

 b. En déduire que : $\forall\ x \in [0,1],\ F(x)=\displaystyle\int_0^x\left(\int_u^1 f(t).dt\right).du$.

a. On peut écrire : $\forall\ x \in [0,1],\ F(x)=\displaystyle\int_0^x t.f(t).dt+\int_x^1 x.f(t).dt=\int_0^x t.f(t).dt-x.\int_1^x f(t).dt$.

On fait ainsi apparaître deux primitives de fonctions continues sur $[0,1]$, et par opérations, F est bien de classe C^1 sur $[0,1]$.

De plus : $\forall\ x \in [0,1],\ F'(x)=x.f(x)-[\displaystyle\int_1^x f(t).dt+x.f(x)]=-\int_1^x f(t).dt$.

Cette écriture de F' montre maintenant que F' est elle-même de classe C^1 sur [0,1], et :

$\forall\ x \in [0,1],\ F''(x) = -f(x)$.

b. Puisque [0,1] est un intervalle, on en déduit en primitivant que F' s'écrit :

$\forall\ x \in [0,1],\ F'(x) = -\int_0^x f(t).dt + C$,

et comme F' s'annule en 1, on en déduit que : $C = \int_0^1 f(t).dt$,

d'où : $\forall\ x \in [0,1],\ F'(x) = \int_x^1 f(t).dt$.

On en déduit de même, F s'annulant en 0 que :

$\forall\ x \in [0,1],\ F(x) = \int_0^x F'(u).du = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t).dt \right).du$.

---

10. On note F l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}.dt$.

a. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.(\ln(x))^2$.

b. En déduire que : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}.dt = \frac{1}{2}.(\ln(x))^2 + F(x)$.

---

a. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$, est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc y admet des primitives.

F apparaît alors comme la primitive de f qui s'annule en 1.

On peut alors noter : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}.(\ln(x))^2$,

et par opérations, G est de définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Puis : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ G'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2}.F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{1}{x^2}.[x.(\ln(1+x) - \ln(x))] - \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Donc G est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, et comme elle s'annule en 1, on en déduit le résultat voulu.

b. On peut alors en déduire que : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}.dt = \int_1^x \frac{1}{t}.[\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{t}{x}\right)].dt$.

La première partie de l'intégrale se calcule immédiatement et on peut effectuer dans la deuxième le changement de variable : $t = u.x$, pour obtenir :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}.dt = \ln(x).\ln(x) + \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\ln(1+u)}{u}.du = (\ln(x))^2 - F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.(\ln(x))^2 + F(x)$.

---

11. En utilisant une fonction intermédiaire (que l'on étudiera) définie à l'aide de deux intégrales, montrer que :

$\forall\ a \in \mathbb{R},\ \int_0^{\sin^2(a)} \arcsin(\sqrt{x}).dx + \int_0^{\cos^2(a)} \arccos(\sqrt{x}).dx = \frac{\pi}{4}$.

On peut définir : $\forall\ a \in \mathbb{R},\ F(a) = \int_0^{\sin^2(a)} \arcsin(\sqrt{x}).dx + \int_0^{\cos^2(a)} \arccos(\sqrt{x}).dx$.

Puisque : $x \mapsto \arcsin(\sqrt{x})$, est définie, continue sur [0,1], elle y admet des primitives et on peut noter S celle qui s'annule en 0.

De même on note C la primitive sur [0,1] et s'annulant en 0 de : $x \mapsto \arccos(\sqrt{x})$.

Puisque : $\forall\ a \in \mathbb{R}^+,\ \sin^2(a) \in [0,1],\ \int_0^{\sin^2(a)} \arcsin(\sqrt{x}).dx$ existe, vaut $S(\sin^2(a))$,

et avec un raisonnement similaire, l'autre partie vaut $C(\cos^2(a))$.

Donc F est définie sur $\mathbb{R}$, et : $\forall\ a \in \mathbb{R},\ F(a) = C(\sin^2(a)) + S(\cos^2(a))$.

On constate alors que F est paire : $\forall\ a \in \mathbb{R},\ F(-a) = C(\sin^2(-a)) + S(\cos^2(-a)) = F(a)$,

et π-périodique puisque : $\forall\ a \in \mathbb{R},\ \sin^2(a+\pi) = \sin^2(a)$, et : $\cos^2(a+\pi) = \cos^2(a)$.

On peut donc restreindre son étude à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ où elle est de classe C^1 par opérations.

Puis : $\forall\ a \in \mathbb{R},\ F'(a) = 2.\sin(a).\cos(a).S'(\sin^2(a)) - 2.\sin(a).\cos(a).C'(\cos^2(a))$.

Or sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $S'(\sin^2(a)) = \arcsin(\sqrt{\sin^2(a)}) = \arcsin(\sin(a)) = a$, et : $C'(\cos^2(a)) = a$.

Donc : $\forall\ a \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ F'(a) = 0$,

et F est constante sur ce segment, donc sur ℝ par parité et périodicité.

Comme enfin : $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(\sqrt{x}).dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos(\sqrt{x}).dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\pi}{2}.dx = \dfrac{\pi}{4}$,

on en déduit le résultat.

12. Pour f une fonction continue de ℝ dans ℝ, on pose : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x \sin(x-t).f(t).dt$.
    a. En linéarisant le sinus, montrer que g est de classe C^1 sur ℝ puis que :
    $\forall\ x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \int_0^x \cos(x-t).f(t).dt$.
    b. Montrer de même que g est de classe C^2 sur ℝ, puis qu'elle est solution sur ℝ de l'équation différentielle : $y''+y = f(x)$.
    c. Donner toutes les solutions de cette équation différentielle.

a. On peut écrire :
$\forall\ x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) = \int_0^x [\sin(x).\cos(t) - \sin(t).\cos(x)].f(t).dt = \sin(x).\int_0^x \cos(t).f(t).dt - \cos(x).\int_0^x \sin(t).f(t).dt,$$
et comme somme de produits de fonctions C^1 sur ℝ (f est continue sur ℝ), g est de classe C^1 sur ℝ.
Puis :
$\forall\ x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = \cos(x).\int_0^x \cos(t).f(t).dt + \sin(x).\int_0^x \sin(t).f(t).dt + \sin(x).\cos(x).f(x) - \sin(x).\cos(x).f(x),$$
et donc : $g'(x) = \int_0^x \cos(x-t).f(t).dt$.

b. Le même argument que précédemment montre que g' est de classe C^1 sur ℝ, et :
$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ g''(x) = -\sin(x).\int_0^x \cos(t).f(t).dt + \cos(x).\int_0^x \sin(t).f(t).dt + [\cos^2(x).f(x) + \sin^2(x).f(x)].$$
D'où : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ g''(x) = -g(x) + f(x)$,
et g est bien solution sur ℝ de l'équation différentielle : $y''+y = f(x)$.

c. La solution générale sur ℝ de l'équation homogène associée à cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants pour la partie homogène est :
$\forall\ x \in \mathbb{R},\ y(x) = \alpha.\sin(x) + \beta.\cos(x)$, avec : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
Les solutions sur ℝ de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :
$\forall\ x \in \mathbb{R},\ y(x) = \alpha.\sin(x) + \beta.\cos(x) + g(x)$, avec : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Convergence et calcul éventuel d'intégrales impropres.

13. Etudier à l'aide de primitives si les intégrales suivantes sont convergentes et si elles le sont, préciser leur valeur.
    a. $\int_0^1 \ln(x).dx$, b. $\int_0^{+\infty} e^{-a.x}.dx$, avec : a ∈ ℝ ou ℂ, c. $\int_0^{+\infty} \sin^2(x).dx$.

a. La fonction dans la première intégrale proposée est définie, continue sur]0,1] et l'intégrale est généralisée en sa borne inférieure.
Puis : $\forall\ x \in\ ]0,1]$, $\int \ln(x).dx = x.\ln(x) - \int 1.dx = x.\ln(x) - x + C$, avec : $C \in \mathbb{R}$.
Ces primitives admettent une limite finie en 0, donc l'intégrale proposée converge.
En notant par exemple F la primitive qui s'annule en 1, on a alors :

$\int_0^1 \ln(x).dx = F(1) - \lim_{x\to 0} F(x) = -1 + 0 = -1$.

b. La fonction sous la deuxième intégrale est définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ et l'intégrale est généralisée en +∞.

Si : $a = 0$, alors : $\int 1.dx = x + C$, qui n'admet pas de limite finie en +∞.

Si : $a \neq 0$, on a :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $\int e^{-a.x}.dx = \dfrac{e^{-a.x}}{-a} + C = \dfrac{e^{-\alpha.x}}{-a}.e^{-i.\beta.x} + C$, avec : $C \in \mathbb{C}$, et : $a = \alpha + i.\beta$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Si : $\alpha > 0$, la primitive trouvée a une limite nulle en +∞ (pour : $C = 0$), égale à C dans le cas général.

Si : $\alpha = 0$, alors : $\beta \neq 0$, puisque : $a \neq 0$, et la fonction : $x \mapsto e^{-i.\beta.x}$, n'a pas de limite en +∞.

Si : $\alpha < 0$, la primitive trouvée tend en module vers +∞ en +∞.

Donc cette primitive admet une limite finie en +∞ si et seulement si : $\alpha = \mathrm{Re}(a) > 0$, et l'intégrale proposée converge si et seulement si : $\mathrm{Re}(a) > 0$.

En notant F une de ces primitives, on a :

$\forall\ a \neq 0$, tel que : $\mathrm{Re}(a) > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-a.x}.dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = C - [-\dfrac{1}{a} + C] = \dfrac{1}{a}$.

c. La fonction sous l'intégrale est définie, continue sur [0,+∞) et l'intégrale est généralisée en +∞.

Puis : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\int \sin^2(x).dx = \int \dfrac{1-\cos(2.x)}{2}.dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(2.x)}{4} + C \geq \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} + C$, avec : $C \in \mathbb{R}$,

et ces primitives n'admettent pas de limite finie en +∞ du fait de la minoration.

Donc l'intégrale proposée diverge.

14. Montrer la convergence et calculer les intégrales généralisées :
a. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right).dt$, b. $\int_1^{+\infty} \dfrac{\arctan(t)}{t^2}.dt$, c. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(t)}{1+t^2}.dt$.

a. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right).dt$: la fonction f sous la première intégrale est définie et continue sur]0,+∞), et :

$\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}.dt$ est absolument convergente,

$\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{0}{\sim} \ln\left(\dfrac{1}{t^2}\right) = -2.\ln(t) = o_0(\sqrt{t})$, et $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{t}}.dt$ est absolument convergente.

Ainsi par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur]0,+∞) et l'intégrale converge.

Puis la fonction : $t \mapsto t.\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$, admet une limite finie (nulle) en 0 et en +∞ (à l'aide par exemple des équivalents précédents) ce qui autorise l'intégration par parties suivante :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right).dt = \left[t.\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t.\frac{\frac{-2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}}.dt = 0 + 2.\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}.dt = \pi.$$

b. $\int_1^{+\infty} \dfrac{\arctan(t)}{t^2}.dt$: la fonction f sous l'intégrale est définie, continue sur [1,+∞).

De plus : $\forall\ t \geq 1$, $0 \leq \dfrac{\arctan(t)}{t^2} \leq \dfrac{\pi}{2}.\dfrac{1}{t^2}$,

ce qui garantit (par comparaison de fonctions positives) la convergence de l'intégrale.

Puis la fonction : $t \mapsto -\dfrac{\arctan(t)}{t}$, admet une limite finie (nulle) en +∞ ce qui autorise l'intégration par parties suivante : $\int_1^{+\infty} \dfrac{\arctan(t)}{t^2}.dt = \left[-\dfrac{\arctan(t)}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t.(1+t^2)}.dt$.

De plus : $\forall\ t \geq 1$, $\dfrac{1}{t.(1+t^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$, et : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}.dt = \frac{\pi}{4} + \left[\ln(t) - \frac{1}{2}.\ln(1+t^2)\right]_1^{+\infty}$.

A noter qu'il ne faut surtout pas séparer les deux logarithmes en dehors du crochet.

Finalement : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}.dt = \frac{\pi}{4} + \left[\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

c. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}.dt$: la fonction f sous l'intégrale est définie, continue sur $[0,+\infty)$.

De plus : $\forall\ t \geq 1$, $0 \leq \dfrac{\arctan(t)}{1+t^2} \leq \dfrac{\pi}{2}.\dfrac{1}{t^2}$,

ce qui garantit (par comparaison de fonctions positives) la convergence de l'intégrale.

Enfin la fonction : $t \mapsto (\arctan(t))^2$, admet une limite finie en $+\infty$, ce qui autorise l'intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}.dt = [(\arctan(t))^2]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}.dt, \text{ et donc : } \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}.dt = \frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

15. Soit : $\omega \in \mathbb{R}$.
   a. Montrer l'intégrabilité de : $t \mapsto e^{(-1+i.\omega).t}$, sur $\mathbb{R}^+$.
   b. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-1+i.\omega).t}.dt$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\omega.t).e^{-t}.dt$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\omega.t).e^{-t}.dt$.
   c. A l'aide d'une primitive, calculer les trois intégrales précédentes.
   d. Retrouver la valeur des deux dernières intégrales à l'aide d'une double intégration par parties.

a. La fonction proposée est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et : $\forall\ t \in \mathbb{R}^+$, $\left|e^{(-1+i.\omega).t}\right| \leq e^{-t}$.

Or la fonction : $t \mapsto e^{-t}$, est définie, continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, soit à l'aide d'une primitive, soit comme $o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc par comparaison de fonctions positives, la fonction initiale est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b. Il suffit de dire que la première intégrale est absolument convergente du fait de la question a, et que dans ce cas, les deux autres intégrales sont les parties réelle et imaginaire de cette première intégrale et sont donc convergentes.

De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(-1+i.\omega).t}.dt = \left[\frac{e^{(-1+i.\omega).t}}{-1+i.\omega}\right]_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{(-1+i.\omega).t}}{-1+i.\omega}\right) - \frac{1}{-1+i.\omega} = \frac{1}{1-i.\omega} = \frac{1+i.\omega}{1+\omega^2}$.

En effet : $\forall\ t \in \mathbb{R}^+$, $\left|\dfrac{e^{(-1+i.\omega).t}}{-1+i.\omega}\right| = \dfrac{e^{-t}}{|-1+i.\omega|}$, et on en déduit que : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{(-1+i.\omega).t}}{-1+i.\omega}\right) = 0$.

Enfin :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\omega.t).e^{-t}.dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+i.\omega).t}.dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+i.\omega}{1+\omega^2}\right) = \frac{1}{1+\omega^2}$, et :
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\omega.t).e^{-t}.dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+i.\omega).t}.dt\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1+i.\omega}{1+\omega^2}\right) = \frac{\omega}{1+\omega^2}$.

c. On pose : $\forall\ t \in \mathbb{R}^+$, $u(t) = \cos(\omega.t)$, $v(t) = -e^{-t}$.

Puisque $[u(t).v(t)]$ admet une limite finie en $+\infty$ (avec le théorème des gendarmes), on peut procéder à une intégration par parties et écrire :

$$\int_0^{+\infty} \cos(\omega.t).e^{-t}.dt = [-\cos(\omega.t).e^{-t}]_0^{+\infty} - \omega.\int_0^{+\infty} \sin(\omega.t).e^{-t}.dt = 1 - \omega.\int_0^{+\infty} \sin(\omega.t).e^{-t}.dt,$$

et avec des arguments similaires, on procède à une deuxième intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \cos(\omega.t).e^{-t}.dt = 1 - \omega.[-\sin(\omega.t).e^{-t}]_0^{+\infty} - \omega^2.\int_0^{+\infty} \cos(\omega.t).e^{-t}.dt = 1 - \omega^2.\int_0^{+\infty} \cos(\omega.t).e^{-t}.dt.$$

En rassemblant, on en déduit que : $(1+\omega^2).\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\omega.t).e^{-t}.dt = 1$, puis : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\omega.t).e^{-t}.dt = \frac{1}{1+\omega^2}$, et :

$$\omega.\int_0^{+\infty}\sin(\omega.t).e^{-t}.dt = 1-\int_0^{+\infty}\cos(\omega.t).e^{-t}.dt = 1-\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}.$$

Enfin, pour ω nul, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\sin(\omega.t).e^{-t}.dt$, est nulle, sinon : $\int_0^{+\infty}\sin(\omega.t).e^{-t}.dt = \frac{\omega}{1+\omega^2}$.

16. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur : $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, pour que ces intégrales existent.

a. $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^a.(t-1)^b}$, b. $\int_0^{+\infty}\frac{t^a}{1+t^b}.dt$, c. $\int_0^{+\infty}\frac{t^a.e^{-t}}{1+t^b}.dt$.

a. La fonction sous l'intégrale est définie, continue et positive sur]1,+∞) et l'intégrale est généralisée en ses deux bornes.
Puis en +∞, on a : $\frac{1}{t^a.(t-1)^b} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{a+b}}$, et par comparaison de fonctions à valeurs positives, $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^a.(t-1)^b}$ converge si et seulement si $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^{a+b}}$ converge, soit : $a+b>1$.
En 1, on a : $\frac{1}{t^a.(t-1)^b} \underset{1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^b}$, et de même, $\int_1^{2}\frac{dt}{t^a.(t-1)^b}$ converge si et seulement si $\int_1^{2}\frac{dt}{(t-1)^b}$ converge, soit : $b<1$.
Finalement l'intégrale est convergente si et seulement si : $(b<1, a+b>1)$.

b. La fonction dans la deuxième intégrale est définie, continue sur]0,+∞), positive, donc l'intégrale est généralisée en ses deux bornes.
Pour l'étude en +∞, on distingue alors plusieurs cas :

$b>0$: $\frac{t^a}{1+t^b} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{b-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : $b-a>1$,

$b=0$: $\frac{t^a}{1+t^b} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2.t^{-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : $-a>1$,

$b<0$: $\frac{t^a}{1+t^b} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : $-a>1$.

Pour l'étude en 0, on distingue aussi plusieurs cas :

$b>0$: $\frac{t^a}{1+t^b} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : $-a<1$,

$b=0$: $\frac{t^a}{1+t^b} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2.t^{-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : $-a<1$,

$b<0$: $\frac{t^a}{1+t^b} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{b-a}}$, et l'intégrale converge si et seulement si : $b-a<1$.

Conclusion :
l'intégrale converge si et seulement si : $(b>0, -1<a<b-1)$ ou $(b<0, b-1<a<-1)$.

c. La fonction dans cette dernière intégrale est définie, continue et positive sur]0,+∞) et l'intégrale est généralisée en ses deux bornes.
Les équivalents précédents permettent d'affirmer qu'en +∞, la fonction est toujours négligeable devant $\frac{1}{t^2}$, donc l'intégrale est toujours convergente sur [1,+∞).
Conclusion : l'intégrale est convergente si et seulement si elle converge sur]0,1], autrement dit : $(b\geq 0, a>-1)$ ou $(b<0, a-b>-1)$.

17. Pour : $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de l'intégrale : $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt$, et calculer sa valeur.

Pour : $n \in \mathbb{N}$, la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur [0,+∞) et l'intégrale est généralisée en +∞.

Puisque, en envisageant une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{+\infty} n.t^{n-1}.e^{-t}.dt$ est encore convergente pour : $n \geq 1$, on peut écrire directement :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt = [-t^n.e^{-t}]_0^{+\infty} + n.\int_0^{+\infty} t^{n-1}.e^{-t}.dt$,

soit : $I_{n+1} = 0 + n.I_n$ ou encore : $I_{n+1} = n.I_n$.

De plus : $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}.dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$,

donc par récurrence immédiate : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = n!.I_1 = n!$.

18. Soit : $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer l'ensemble D des valeurs de λ telles que l'intégrale : $I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2).(1+t^\lambda)}$, converge.

b. A l'aide du changement de variable (que l'on justifiera) : $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que : $\forall\ \lambda \in D,\ I(\lambda) = \dfrac{\pi}{4}$.

a. On constate que : $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ t \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leq \dfrac{1}{(1+t^2).(1+t^\lambda)} \leq \dfrac{1}{(1+t^2)}$.

La fonction majorante étant clairement intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, $I(\lambda)$ existe pour tout λ réel.

b. Le changement de variable étant strictement décroissant et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ I(\lambda) = \int_{+\infty}^0 -\frac{du}{u^2.\left(1+\frac{1}{u^2}\right).\left(1+\frac{1}{u^\lambda}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^\lambda.du}{(u^2+1).(u^\lambda+1)}.$$

On en déduit que : $2.I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2).(1+t^\lambda)} + \int_0^{+\infty} \dfrac{u^\lambda.du}{(u^2+1).(u^\lambda+1)} = \int_0^{+\infty} \dfrac{du}{(u^2+1)} = \dfrac{\pi}{2}$.

On conclut que : $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ I(\lambda) = \dfrac{\pi}{4}$.

19. A l'aide d'intervalles bien choisis, montrer que la fonction : $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$, n'est pas intégrable sur $[1,+\infty)$.

Que peut-on dire des intégrales $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2(x)}{x}.dx$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2(x)}{x}.dx$?

a. Notons tout d'abord que la fonction proposée est positive sur $[1,+\infty)$.

Puis pour : $k \geq 0$, et sur l'intervalle $[k.\pi,(k+1).\pi]$, on a :

$$\forall\ x \in [k.\pi,(k+1).\pi],\ \frac{\sin^2(x)}{x} \geq \frac{\sin^2(x)}{(k+1).\pi},\ \text{et : } \int_\pi^{(n+1).\pi} \frac{\sin^2(x)}{x}.dx \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1).\pi}.\int_{k.\pi}^{(k+1).\pi} \sin^2(x).dx.$$

De plus : $\forall\ k \geq 1,\ \int_{k.\pi}^{(k+1).\pi} \sin^2(x).dx = \int_0^\pi \sin^2(x).dx = \dfrac{\pi}{2}$,

mais la valeur exacte n'a pas d'importance.

D'où : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \int_1^{(n+1).\pi} \dfrac{\sin^2(x)}{x}.dx \geq \dfrac{1}{2}.\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{(k+1)} = \dfrac{1}{2}.(H_{n+1}-1)$,

où H_n désigne la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série harmonique.

En notant F une primitive de la fonction : $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$, on constate que F est croissante et $(F(n.\pi))$ tend vers $+\infty$, donc F tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et la fonction n'est pas intégrable sur $[1,+\infty)$.

b. Puisque la fonction est positive, son intégrabilité sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ est équivalente à la convergence de son intégrale sur ce même intervalle.

Donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2(x)}{x}.dx$ diverge, ainsi que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2(x)}{x}.dx$.

On peut noter en revanche que $\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x}.dx$ converge, la fonction sous l'intégrale admettant une limite finie (nulle) en 0 et donc étant prolongeable par continuité sur [0,1].

20. Déterminer les réels a et b de telle sorte que l'intégrale $\int_0^{+\infty}(\sqrt{t}+a.\sqrt{t+1}+b.\sqrt{t+2}).dt$ converge. Calculer alors sa valeur.

La fonction f sous l'intégrale est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
Elle admet pour primitive sur $\mathbb{R}^+$, la fonction F définie par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) = \int^x (\sqrt{t}+a.\sqrt{t+1}+b.\sqrt{t+2}).dt = \frac{2}{3}.\left(x^{\frac{3}{2}} + a.(x+1)^{\frac{3}{2}} + b.(x+2)^{\frac{3}{2}}\right).$$

L'intégrale proposée converge donc si et seulement si F admet une limite finie en $+\infty$.
On peut alors effectuer un développement limité de $F(x)$ en $+\infty$:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ F(x) = \frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}.\left(1+a.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} + b.\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}.\left((1+a+b)+\frac{3}{2}.(a+2.b).\frac{1}{x}+O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Donc F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si : $1+a+b=0$, et : $a+2.b=0$,
autrement dit si et seulement si : $a=-2$, et : $b=1$.
Pour ces valeurs, on a alors :

$$\int_0^{+\infty}(\sqrt{t}-2.\sqrt{t+1}+\sqrt{t+2}).dt = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = 0 - \frac{2}{3}.(-2+2^{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{3}.(\sqrt{2}-1).$$

21. a. Montrer la convergence des intégrales : $I = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^3}$, et : $J = \int_0^{+\infty}\frac{t.dt}{1+t^3}$.

b. Montrer que ces deux intégrales sont égales à l'aide du changement de variable : $u = \frac{1}{t}$.

c. Calculer $(I+J)$, et en déduire leur valeur commune.

d. Retrouver ce résultat en utilisant une décomposition en éléments simples dans la première intégrale.

a. Les fonctions dans les deux intégrales sont définies, continues et positives sur $[0,+\infty)$ et les deux intégrales sont généralisées en $+\infty$.
De plus : $\frac{1}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$, et : $\frac{t}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$; toutes les fonctions étant positives, I et J convergentes.

b. Comme proposé, utilisons dans J le changement de variable : $u = \frac{1}{t} = \varphi(t)$,
qui est bien une bijection C^1 de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même.
On obtient alors : $J = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{u}.\frac{1}{1+\frac{1}{u^3}}.\left(-\frac{1}{u^2}\right).du = \int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^3} = I$.

c. Là encore, comme proposé : $I+J = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1-t+t^2} = \frac{4}{3}.\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(\frac{2.t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}.\left[\arctan\left(\frac{2.t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty}$.

Donc : $I+J = \frac{2}{\sqrt{3}}.\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{4.\pi}{3.\sqrt{3}}$, et : $I = J = \frac{2.\pi}{3.\sqrt{3}}$.

d. Enfin, on peut commencer par écrire : $\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{b.t+c}{1-t+t^2}$, et on trouve : $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=\frac{2}{3}$.
On cherche alors une primitive de cette fonction en :

$$F(t) = \frac{1}{3}.\int\frac{dt}{1+t} - \frac{1}{6}.\int\frac{2.t-1}{t^2-1+1}.dt + \frac{1}{2}.\int\frac{dt}{t^2-1+1} = \frac{1}{3}.\ln(1+t) - \frac{1}{6}.\ln(t^2-1+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}.\arctan\left(\frac{2.t-1}{\sqrt{3}}\right).$$

F admet une limite finie en $+\infty$ qui vaut (en regroupant les ln) : $0+\frac{\pi}{2.\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2.\sqrt{3}}$, et : $F(0)=-\frac{\pi}{6.\sqrt{3}}$.

On retrouve ainsi le résultat précédent pour I.

22. Intégrale de Gauss.

a. Montrer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de : $x\mapsto e^{-x^2}$.

On notera : $I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt$.

b. Montrer que : $\forall\ u\in\mathbb{R}^+$, $1-u\le e^{-u}\le(1+u)^{-1}$.

c. En déduire que : $\forall\ t\in[0,\sqrt{n}]$, $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\le e^{-t^2}$, puis que : $\forall\ t\in\mathbb{R}^+$, $e^{-t^2}\le\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

d. Soit : $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x).dx$.

Montrer que : $\forall\ n\ge 1$, $\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n.dt=\sqrt{n}.J_{2n+1}$, $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}=\sqrt{n}.J_{2n-2}$.

e. En reprécisant un équivalent de J_n en $+\infty$ donner la valeur de I.

a. La fonction proposée (appelons la f) est définie, continue et positive sur $[0,+\infty)$.

De plus, on constate que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2.e^{-x^2}=0$, donc : $e^{-x^2}=o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, d'où l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.

b. On peut démontrer ces deux inégalités en étudiant des fonctions intermédiaires sur $\mathbb{R}^+$ comme :

$\varphi(u)=e^{-u}-(1-u)$, et : $\psi(u)=e^{u}-(1+u)$.

On a alors : $\forall\ u\in\mathbb{R}^+$, $\varphi'(u)=-e^{-u}+1\ge 0$, et : $\varphi(0)=0$.

Donc φ est croissante, nulle en 0 donc positive sur $\mathbb{R}^+$, ce qui donne l'inégalité de droite.

Puis : $\forall\ u\in\mathbb{R}^+$, $\psi'(u)=e^{u}-1\ge 0$, et : $\psi(0)=0$.

Pour les mêmes raisons, ψ est positive sur $\mathbb{R}^+$ ce qui donne l'inégalité de gauche.

c. Pour : $t\in[0,\sqrt{n}]$, on en déduit que : $\varphi\left(\frac{t^2}{n}\right)\ge 0$, donc : $0\le\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\le e^{-\frac{t^2}{n}}$, $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\le e^{-t^2}$.

En utilisant le fait que : $x\mapsto x^n$, est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on déduit le premier point demandé.

Puis, pour : $t\in\mathbb{R}^+$, $\psi\left(\frac{t^2}{n}\right)\ge 0$, d'où : $0\le e^{-\frac{t^2}{n}}\le\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$, et à nouveau : $e^{-t^2}\le\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

d. Dans $\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n.dt$ (intégrale sur un segment), on réalise le changement de variable : $t=\sqrt{n}.\sin(x)$,

et : $\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n.dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(x))^n.\sqrt{n}.\cos(x).dx=\sqrt{n}.J_{2.n+1}$.

L'autre intégrale est généralisée en $+\infty$ mais converge pour : $n\ge 1$, car :

$0\le\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}\le\frac{n^n}{t^{2.n}}$, sur $[1,+\infty)$.

On effectue alors le changement de variable C^1 strictement croissant : $t=\sqrt{n}.\tan(x)$, et :

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}=\sqrt{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\tan^2(x))}{(1+\tan^2(x))^n}.dx=\sqrt{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(1+\tan^2(x))^{n-1}}=\sqrt{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2.(n-1)}(x).dx=\sqrt{n}.J_{2n-2}.$$

e. La fonction exponentielle étant positive, on a : $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}.dt\le\int_0^{+\infty}e^{-t^2}.dt$.

En intégrant les inégalités de la question c, on obtient alors :

$$\forall\ n \geq 1,\ \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n .dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}.dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

De plus : $\sqrt{n}.J_{2.n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}.\sqrt{\frac{\pi}{2.(2.n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et : $\sqrt{n}.J_{2.n-2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}.\sqrt{\frac{\pi}{2.(2.n-2)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure que la suite (constante) égale à I, encadrée ci-dessus, tend donc vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et finalement : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercices divers : série, fonctions, équivalents.

23. a. Montrer que la fonction donnée sur (-∞,0[∪]0,1[par : $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

b. Montrer que : $\forall\ x \in$ (-∞,0[∪]0,+1[, $f(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}.dt$, existe, puis que f est prolongeable par continuité en 0 (on continuera à noter f le prolongement).

c. Montrer que f est dérivable sur (-∞,+1[.

d. Montrer que : $\forall\ x \in$ (-∞,+1[, $f(x) + f\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}.(\ln(1-x))^2$.

a. Il suffit de remarquer, à l'aide d'un développement limité que : $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = -1$,

pour constater qu'on peut prolonger cette fonction φ en 0 en posant : $\varphi(0) = -1$.

b. Pour x fixé dans : (-∞,0[∪]0,+1[, $\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}.dt$ est une intégrale généralisée en 0.

En effet φ est définie, continue sur $]0,x]$ (ou $[x,0[$) et garde un signe constant négatif sur l'intervalle d'intégration.

Enfin, φ est prolongeable en 0 donc l'intégrale converge.

Si on note φ_0 ce prolongement, alors on a encore :

$$\forall\ x \in (-\infty,0[\cup]0,+1[,\ f(x) = -\int_0^x \varphi_0(t).dt.$$

f est donc l'opposé de la primitive de φ_0 s'annulant en 0, et elle a une limite finie nulle en 0.

c. f étant une primitive de φ_0 sur (-∞,1[, elle est y même de classe C^1.

d. On pose : $\forall\ x \in$ (-∞,+1[, $F(x) = f(x) + f\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{1}{2}.(\ln(1-x))^2$.

On remarque tout d'abord que : $\forall\ x \in$ (-∞,+1[, $\frac{x}{x-1} \in$ (-∞,+1[.

Puis :

$$\forall\ x \in (+\infty,+1[, F'(x) = f'(x) - \frac{1}{(x-1)^2}.f'\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x.(x-1)} - \frac{\ln(1-x)}{1-x} = 0.$$

Cette dernière égalité est en fait valable pour : $x \neq 0$, mais puisque f est C^1, F l'est aussi et par continuité de F', on a encore : $F'(0) = 0$.

F est donc constante sur son intervalle de définition, et :

$\forall\ x \in$ (-∞,+1[, $F(x) = F(0) = 0$,

d'où le résultat.

24. a. Montrer que la fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{(\arctan(t))^2}$, est intégrable sur]0,1].

b. Montrer que la fonction $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{(\arctan(t))^2}$, est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c. A l'aide de la question a, déterminer un équivalent de F en 0.

a. La fonction proposée f est définie, continue sur]0,1].

De plus :

$$\forall\ t \in\ ]0,1],\ \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan(t))^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}.\left(1 - \frac{t^2}{3} + o_0(t^2)\right)^{-2} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}.\left(1 + \frac{2.t^2}{3} + o_0(t^2)\right) = -\frac{2}{3} + o_0(1),$$

et : $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan(t))^2}\right) = -\frac{2}{3}$,

autrement dit f est prolongeable par continuité en 0 et f est intégrable sur]0,1].

b. La fonction : $t \mapsto \dfrac{1}{(\arctan(t))^2}$, est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc y admet des primitives.

F apparaît alors comme l'opposée de la primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1.

c. On peut alors écrire :

$$\forall\ x > 0,\ F(x) = \int_x^1 \left(\frac{1}{(\arctan(t))^2} - \frac{1}{t^2}\right).dt + \int_x^1 \frac{1}{t^2}.dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 - \int_x^1 f(t).dt = \frac{1}{x} - 1 - \int_x^1 f(t).dt.$$

Enfin, quand x tend vers 0, $x \mapsto 1 + \displaystyle\int_x^1 f(t).dt$, admet une limite finie L du fait de la question a, donc :

$$x.F(x) = 1 - x.(1 + \int_x^1 f(t).dt) \xrightarrow[0]{} 1 - 0.L = 1, \text{ et : } F(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

25. a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f où on a posé pour : $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a + 1}$.

b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $\mathscr{D}$ et de limite nulle en $+\infty$.

a. Pour tout réel a, la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur $[1,+\infty)$.

Si : $a \le 0$, la fonction sous l'intégrale a une limite finie non nulle en $+\infty$ donc l'intégrale diverge.

Si : $a > 0$, on a : $\dfrac{1}{t^a + 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^a}$, et l'intégrale converge si et seulement si : $a > 1$.

Finalement : $\mathscr{D} =]1,+\infty)$.

b. On constate ensuite que : $\forall\ 1 < a < b,\ \forall\ t \ge 1,\ \dfrac{1}{t^b + 1} \le \dfrac{1}{t^a + 1}$,

et comme les intégrales convergent, on peut intégrer sur $[1,+\infty)$, ce qui donne : $f(b) \le f(a)$,

et f est bien décroissante sur $[1,+\infty)$.

Comme de plus la fonction intégrée est positive, f est elle-même positive.

Etant décroissante, on a ainsi la garantie que f admet une limite finie (positive) en $+\infty$.

Mais de plus : $\forall\ a > 1,\ 0 \le \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^a} = f(a) \le \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a} = \frac{1}{a-1}$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $f(a)$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$.

26. Etudier et justifier le tracé approximatif de la fonction : $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{t^2 + t}{\sqrt{t^8 + 1}}.dt$.

La fonction f sous l'intégrale est définie, continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction proposée qu'on notera F est donc la primitive de f sur $\mathbb{R}$, s'annulant en 1.

A ce titre, elle est définie, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^8+1}}$, et donc F' s'annule en 0 et -1.

F est croissante sur (-∞,-1[et]0,+∞), décroissante sur]-1,0[, et : $F(0) < 0$.

Enfin, F admet une limite finie en ±∞, car :

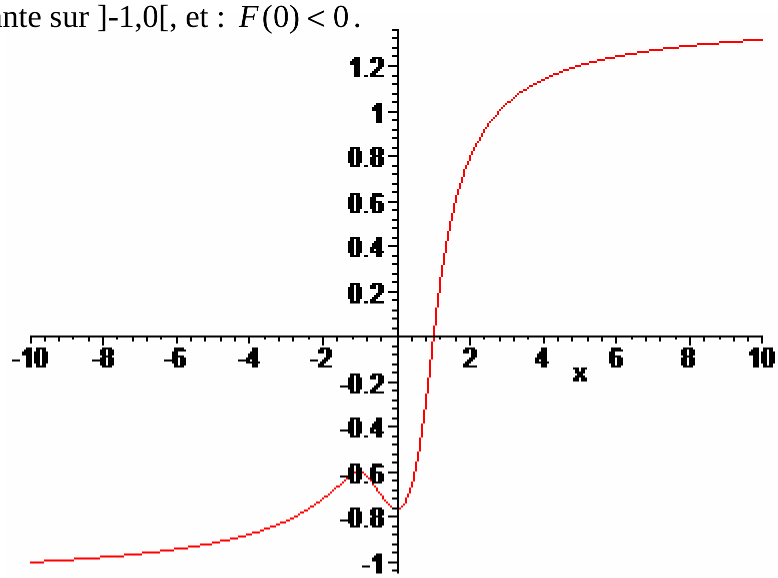
- sur [1,+∞), f est positive et : $\dfrac{t^2+t}{\sqrt{t^8+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$,

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2+t}{\sqrt{t^8+1}}.dt$ converge et

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe et est finie.

- sur (-∞,-1[, f est également positive, et le même équivalent montre la convergence de $\displaystyle\int_1^{-\infty} \frac{t^2+t}{\sqrt{t^8+1}}.dt$ puis l'existence d'une limite finie pour F en -∞.

La courbe représentative de F présente donc deux asymptotes en +∞.



Intégrabilité de fonctions de signe quelconque, à valeurs complexes.

27. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$?

a. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$, b. $g(x) = \dfrac{e^{i.x}}{1+x^a}$, $(a \in \mathbb{R})$, c. $h(x) = e^{-x}.x^{\alpha}.\sin^3(x)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

a. La première fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et :

$$\forall\ x \geq 1,\ |f(x)| = \frac{|\cos(x)|}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

donc la majoration garantit sont intégrabilité sur [1,+∞) donc sur [0,+∞).

b. La deuxième fonction est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et :

$$\forall\ x > 0,\ |g(x)| = \frac{|e^{i.x}|}{1+x^a} = \frac{1}{1+x^a}.$$

Distinguons alors trois cas :

$a < 0$, et la fonction g n'est pas intégrable sur [1,+∞) puisque $\int_1^{+\infty} dt$ diverge,

$a = 0$, et la fonction n'est toujours pas intégrable sur [1,+∞) puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2}.dt$ diverge encore,

$a > 0$, et dans ce cas : $|g(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^a}$, donc g est intégrable sur [1,+∞), si et seulement si : $a > 1$.

Dans ce dernier cas, g est alors intégrable sur]0,1], puisque $|g|$ est prolongeable par continuité en 0, ayant pour limite 1 en 0.

Conclusion : g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si : $a > 1$

Remarque : dans les deux premiers cas, on aurait pu dire que g n'était pas intégrable sur [1,+∞) puisque $|g|$ avait une limite en +∞ et cette limite était non nulle.

c. La troisième fonction est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et :

en 0 : $|h(x)| \underset{0}{\sim} x^{\alpha+3} = \dfrac{1}{x^{-\alpha-3}}$, donc h est intégrable sur]0,1] si et seulement si : $-\alpha-3 < 1$,

ou : $-4 < \alpha$,

en +∞ : $x^2.|h(x)| \leq x^{\alpha+2}.e^{-x}$, ce qui garantit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2.|h(x)| = 0$, et l'intégrabilité de h sur [1,+∞).

Conclusion : h est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si : $-4 < \alpha$.

28. Soit f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall\ x>0,\ f(x)=\dfrac{\ln(x)}{(x+1)^2}$.

a. Etudier l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}.dx$, et en déduire $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}.dx$ à l'aide d'un changement de variable.

c. Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}.dx$?

a. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- en 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}.f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}.\ln(x)=0$, ce qui garantit l'intégrabilité de f sur]0,1],
- en +∞, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}.f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=0$, ce qui garantit à nouveau l'intégrabilité de f sur [1,+∞).

b. On peut chercher une primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall\ x>0,\ F(x)=\int^x \frac{\ln(t)}{(t+1)^2}.dt=\left[-\frac{\ln(t)}{(t+1)}\right]^x+\int^x \frac{1}{t.(t+1)}.dt=-\frac{\ln(x)}{x+1}+\int^x\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right).dt\,.$$

Il faut noter qu'ici, il est plus prudent de raisonner avec des primitives que directement sur des intégrales généralisées.

D'où : $\forall\ x>0,\ F(x)=-\dfrac{\ln(x)}{x+1}+\ln(x)-\ln(x+1)=\dfrac{x.\ln(x)}{x+1}-\ln(x+1)$.

Il est alors facile d'obtenir : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(t+1)^2}.dt=F(1)-\lim_{x\to 0}F(x)=-\ln(2)$.

Puis, avec le changement de variable : $u=\dfrac{1}{t}$, qui est strictement décroissant et de classe C[1] de]0,1] dans [1,+∞), on obtient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t+1)^2}.dt=\int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(\frac{1}{u}+1\right)^2}.\left(-\frac{1}{u^2}\right).du=-\int_0^1 \frac{\ln(u)}{(1+u)^2}.du=\ln(2)$.

c. Evidemment : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t+1)^2}.dt=\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(t+1)^2}.dt+\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t+1)^2}.dt=0$.

29. a. Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

$x\mapsto \ln(\sin(x))$, sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, et : $x\mapsto \ln(\cos(x))$, sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On note alors : $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(x)).dx$, et : $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(x)).dx$.

b. Montrer que : $I=J$.

c. Trouver une relation non triviale entre $(I+J)$ et I, et en déduire la valeur de I.

a. La première fonction est définie, continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, et négative.

De plus : $\sqrt{x}.\ln(\sin(x))=\sqrt{x}.\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)+\sqrt{x}.\ln(x)\xrightarrow[0]{}0$, donc elle est intégrable sur]0,1], puisque l'exposant de la puissance utilisée vérifie : $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$.

L'intégrabilité étant conservée avec un changement de variable bijectif de classe C[1], ici en posant : $u=\dfrac{\pi}{2}-x$, l'intégrabilité de la première fonction sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donne celle de la deuxième sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b. De plus, le changement de variable précédent donne : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)).dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\cos(u)).(-du) = J$.

c. Puis : $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x))].dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin(2.x)) - \ln(2)].dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2.x)).dx - \frac{\pi}{2}.\ln(2)$.

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2.x)).dx = \frac{1}{2}.\int_0^{\pi} \ln(\sin(u)).du = \frac{1}{2}.\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)).du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)).du\right]$.

Et pour finir avec le changement de variable : $u = \pi - x$, on obtient :

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)).du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(x)).(-dx) = I$.

En rassemblant ces résultats, on conclut que : $I + J = I - \frac{\pi}{2}.\ln(2)$, d'où : $J = I = -\frac{\pi}{2}.\ln(2)$.

30. a. Montrer que l'intégrale : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t+i.b)^2}$, converge pour tout réel : $b \neq \pm 1$, puis que : $I \in \mathbb{R}$.

b. Décomposer la fraction sous l'intégrale en éléments simples dans $\mathbb{C}$.

c. Comment obtenir la valeur de I à l'aide de cette décomposition ?

d. En déduire I .

a. La fonction sous l'intégrale est définie sur $\mathbb{R}$ lorsque son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Or ses racines dans $\mathbb{C}$ sont : $t = -i.b \pm i$, et il faut donc supposer : $b \neq \pm 1$ (car des ces cas, la fraction n'est pas définie en 0).
En dehors de ces valeurs de b , elle est continue sur $\mathbb{R}$ puisque ses parties réelle et imaginaire sont des fractions rationnelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\frac{1}{1+(t+i.b)^2} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$,

ce qui assure l'intégrabilité de la fonction sur [1,+∞) et (-∞,-1].
Enfin, avec le changement de variable strictement décroissant et de classe C[1] : $u = -t$, on obtient :

$\overline{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t-i.b)^2} = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-du}{1+(-u-i.b)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+(u+i.b)^2} = I$, et : $I \in \mathbb{R}$.

b. Avec les zéros du dénominateur précisés au-dessus, on peut écrire :

$\frac{1}{1+(t+i.b)^2} = \frac{\alpha}{t+i.b+i} + \frac{\beta}{t+i.b-i}$, et avec : $1 = (\alpha+\beta).t + i.((b-1).\alpha + (b+1).\beta)$,

on obtient : $\beta = -\alpha$, puis : $-2.i.\alpha = 1$, soit : $\alpha = -\frac{1}{2.i} = \frac{i}{2}$, et : $\beta = -\frac{i}{2}$.

Ainsi : $\frac{1}{1+(t+i.b)^2} = \frac{i}{2}.\left(\frac{1}{t+i.b+i} - \frac{1}{t+i.b-i}\right)$.

c. Il suffit alors de déterminer une primitive de la fonction précédente pour obtenir, avec des limites en ±∞ pour obtenir la valeur de I , et comme de plus c'est un réel, il suffit de calculer une primitive de la partie réelle.

d. On écrit donc : $\frac{1}{1+(t+i.b)^2} = \frac{i}{2}.\left(\frac{t-i.b-i}{t^2+(b+1)^2} - \frac{t-i.b+i}{t^2+(b-1)^2}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{i.t+b+1}{t^2+(b+1)^2} - \frac{t+b-1}{t^2+(b-1)^2}\right)$, et :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2}.\left(\arctan\left(\frac{x}{b+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{b-1}\right)\right) + \frac{i}{4}.\ln\left(\frac{x^2+(b+1)^2}{x^2+(b-1)^2}\right)$,

sachant que la partie imaginaire ne sert à rien.

On constate d'ailleurs que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+(b+1)^2}{x^2+(b-1)^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x^2+(b+1)^2}{x^2+(b-1)^2}\right) = 0$.

Puis :

- si : $|b| > 1$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\arctan\left(\frac{x}{b+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{b-1}\right)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\arctan\left(\frac{x}{b+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{b-1}\right)\right) = 0$, et : $I = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,

• si : $|b| < 1$, alors : $\lim_{x\to+\infty}\left(\arctan\left(\frac{x}{b+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{b-1}\right)\right) = \pi$,

et : $\lim_{x\to-\infty}\left(\arctan\left(\frac{x}{b+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{b-1}\right)\right) = -\pi$,

d'où : $I = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = \frac{1}{2}.(\pi - (-\pi)) = \pi$.

31. Soit f continue par morceaux de $[0,+\infty)$ dans $\mathbb{C}$.

a. Montrer que si f est intégrable sur $[0,+\infty)$, alors $\int_x^{x+1} f(t).dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

b. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que le résultat n'est plus vrai si f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty)$.

a. Si on note F une primitive de f sur $[0,+\infty)$, alors :

$\forall\ x \in [0,+\infty)$, $\int_x^{x+1} f(t).dt = F(x+1) - F(x)$.

Puisque F est intégrable sur $[0,+\infty)$, $\int_0^{+\infty} f(t).dt$ converge, F a une limite finie en $+\infty$, et la différence écrite au-dessus tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

b. Si on considère par ailleurs la fonction f définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$,

f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty)$ et :

$\forall\ x \geq 0$, $\int_x^{x+1} f(t).dt = e^{x+1} - e^x = e^x.(e-1)$,

qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Remarque : il faut donc se méfier du raccourci (qui n'a pas de sens) : $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t).dt = \int_{+\infty}^{+\infty} f(t).dt = 0$.

32. Soit f continue par morceaux de $[0,+\infty)$ dans $\mathbb{R}$ et décroissante.

A l'aide d'encadrements, montrer que si f est intégrable sur $[0,+\infty)$, alors $x.f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

On pourra penser à utiliser $\int_x^{2.x} f(t).dt$.

Notons F une primitive de f sur $[0,+\infty)$.

Puisque f est intégrable sur $[0,+\infty)$, F a une limite finie en $+\infty$.

De plus, f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on peut écrire :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $\int_x^{2.x} f(t).dt \leq \int_x^{2.x} f(x).dt = (2.x - x).f(x) = x.f(x)$,

et : $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t).dt \geq \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x).dt = (x - \frac{x}{2}).f(x) = \frac{x}{2}.f(x)$.

On en déduit que : $F(2.x) - F(x) \leq x.f(x) \leq 2.[F(x) - F(\frac{x}{2})]$.

Le théorème des gendarmes garantit alors que $x.f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

33. Soit f une fonction continue et intégrable sur $[1,+\infty)$.

On pose : $\forall\ x \geq 1$, $u(x) = \frac{1}{x^2}.\int_1^x f(t).dt$, et : $v(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Montrer que u et v sont intégrables sur $[1,+\infty)$, et que : $\int_1^{+\infty} u(x).dx = \int_1^{+\infty} v(x).dx$.

La fonction u est clairement définie et continue (et même de classe C^1) sur $[1,+\infty)$.

Puisque f est intégrable sur $[1,+\infty)$, on a :

$\forall\ x \geq 1$, $|u(x)| = \frac{1}{x^2}.\left|\int_1^x f(t).dt\right| \leq \frac{1}{x^2}.\int_1^x |f(t)|.dt \leq \frac{1}{x^2}.\int_1^{+\infty} |f(t)|.dt$, ce qui montre, par majoration de fonction positive, que u est intégrable sur $[1,+\infty)$.

De même, v est continue sur $[1,+\infty)$ et : $\forall\ x \geq 1,\ |v(x)| = \dfrac{|f(x)|}{x} \leq |f(x)|$,

ce qui prouve là encore que v est intégrable sur $[1,+\infty)$.

Enfin en utilisant une intégration par parties sur $[1, A]$, on a :

$$\forall\ A \geq 1,\ \int_1^A \frac{f(x)}{x}.dx = \left[\frac{1}{x}.\int_1^x f(t).dt\right]_1^A - \int_1^A \left(-\frac{1}{x^2}\right).\left(\int_1^x f(t).dt\right).dx.$$

Et comme : $\forall\ A \geq 1,\ \dfrac{1}{A}.\int_1^A f(t).dt - \dfrac{1}{1}.\int_1^1 f(t).dt = \dfrac{1}{A}.\int_1^A f(t).dt$,

on en déduit que : $\forall\ A \geq 1,\ \left|\dfrac{1}{A}.\int_1^A f(t).dt\right| \leq \dfrac{1}{A}.\int_1^A |f(t)|.dt \leq \dfrac{1}{A}.\int_1^{+\infty} |f(t)|.dt$,

d'où : $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{A}.\int_1^A f(t).dt = 0$.

D'où en passant à la limite : $\int_1^{+\infty} v(x).dx = \int_1^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}.dx = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}.\left(\int_1^x f(t).dt\right).dx = \int_1^{+\infty} u(x).dx$.

34. On pose : $\forall\ a \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ J_a(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-a.t}}{t}.dt$, et : $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-3.t} - e^{-t}}{t}.dt$.

a. Justifier l'existence de I.

b. Justifier l'existence de $J_a(x)$, pour tout : $a > 0$, et tout : $x > 0$.

c. Montrer que l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\ t \neq 0,\ \phi(t) = \dfrac{e^{-t} - 1}{t}$, et : $\phi(0) = -1$, est continue sur $\mathbb{R}$.

d. En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} \int_{3.x}^x \dfrac{e^{-t}}{t}.dt$, puis la valeur de I.

a. La fonction f sous l'intégrale définissant I est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et :

$$\forall\ t \in \mathbb{R}^{+*},\ f(t) = \frac{e^{-3.t} - e^{-t}}{t} = \frac{(1 - 3.t + o_0(t)) - (1 - t + o_0(t))}{t} = -2 + o_0(1),$$

et f est prolongeable par continuité en 0.

De plus : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2.f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t.(e^{-3.t} - e^{-t}) = 0$,

du fait du théorème des croissances comparées.

Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et l'intégrale converge.

b. De même : $\forall\ a > 0,\ \lim\limits_{t\to+\infty} t^2.\dfrac{e^{-a.t}}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} t.e^{-a.t} = 0$,

et $J_a(x)$ existe, pour tout : $a > 0$, et tout : $x > 0$.

c. Il est clair que l'application ϕ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.

De plus : $\forall\ t \neq 0,\ \phi(t) = \dfrac{e^{-t} - 1}{t} = \dfrac{(1 - t + o_0(t)) - 1}{t} = -1 + o_0(1)$,

d'où : $\lim\limits_{t\to0} \phi(t) = -1 = \phi(0)$, et ϕ est continue en 0 donc finalement continue sur $\mathbb{R}$.

d. On peut ensuite écrire : $\forall\ x > 0,\ \int_{3.x}^x \dfrac{e^{-t}}{t}.dt = \int_{3.x}^x \dfrac{e^{-t} - 1}{t}.dt + \int_{3.x}^x \dfrac{1}{t}.dt = \int_{3.x}^x \phi(t).dt + [\ln(x) - \ln(3.x)]$.

Comme ϕ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut encore écrire :

$$\forall\ x > 0,\ \int_0^x \phi(t).dt - \int_0^{3.x} \phi(t).dt - \ln(3),$$

et : $\lim\limits_{x\to0} \int_{3.x}^x \dfrac{e^{-t}}{t}.dt = \lim\limits_{x\to0} \left(\int_0^x \phi(t).dt - \int_0^{3.x} \phi(t).dt - \ln(3)\right) = -\ln(3)$.

Enfin : $\forall\ x>0$, $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-3.t}-e^{-t}}{t}.dt=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-3.t}}{t}.dt-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}.dt=\int_{3.x}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}.du-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}.dt=\int_x^{3.x}\frac{e^{-t}}{t}.dt$.

D'où : $I=\lim_{x\to 0}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-3.t}-e^{-t}}{t}.dt=\lim_{x\to 0}\int_x^{3.x}\frac{e^{-t}}{t}.dt=-\ln(3)$.

Semi-convergence.

35. On pose : $f(x)=\frac{e^{i.x}}{\sqrt{x}}$, et : $g(x)=f(x)+\frac{1}{x}$.

a. Montrer que : $f(x)\underset{+\infty}{\sim}g(x)$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties la convergence de $\int_1^{+\infty}f(x).dx$.

c. Que peut-on dire de la convergence de $\int_1^{+\infty}g(x).dx$? Conclusion ?

a. On constate immédiatement que : $\forall\ x\neq 0$, $\frac{g(x)}{f(x)}=1+\frac{e^{-i.x}}{\sqrt{x}}\xrightarrow[+\infty]{}1$, donc : $f(x)\underset{+\infty}{\sim}g(x)$.

b. On calcule : $\forall\ A>1$, $\int_1^A f(x).dx=\left[\frac{e^{i.x}}{i.\sqrt{x}}\right]_1^A-i.\int_1^A\frac{1}{2}.\frac{e^{i.x}}{x^{\frac{3}{2}}}.dx$.

Quand A tend vers +∞, le crochet à une limite finie (qui est $i.e^i$), et la fonction apparaissant dans la deuxième intégrale est intégrable sur [1,+∞) car : $\forall\ x\geq 1$, $\left|\frac{e^{i.x}}{x^{\frac{3}{2}}}\right|=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Donc l'intégrale sur [1,+∞) de cette dernière fonction converge : $A\mapsto\int_1^A\frac{e^{i.x}}{x^{\frac{3}{2}}}.dx$, a une limite finie quand A tend vers +∞, et finalement : $A\mapsto\int_1^A f(x).dx$, aussi.

c. Cette intégrale diverge.

En effet si elle convergeait, alors $\int_1^{+\infty}(g(x)-f(x)).dx$ convergerait également par combinaison linéaire.

Mais elle est égale à $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ qui diverge.

d. La convergence d'intégrales n'est pas conservée pour des fonctions qui ne sont qu'équivalentes en un point.

36. Montrer que : $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}.dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2.dx$, et retrouver la convergence de l'intégrale de Dirichlet.

On effectue dans l'intégrale de Dirichlet (sans préjuger de sa convergence) l'intégration par parties utilisant les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$\forall\ x>0$, $u(x)=\frac{1}{x}$, et : $v(x)=1-\cos(x)$.

Elles sont bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : $\forall\ x>0$, $[u(x).v(x)]=\frac{1-\cos(x)}{x}$,

qui admet une limite finie (nulle) en 0 et en +∞, ce qui se démontre à l'aide d'un développement limité en 0 et du théorème des gendarmes en +∞.

Donc les intégrales $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}.dx$ et $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}.dx$,

sont de même nature, et donc convergentes puisque la deuxième intégrale est clairement convergente.

En effet :

• $\forall\ x>0,\ \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}.\left(1-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o_0(x^2)\right)\right)=\dfrac{1}{2}+o_0(1)$,

et la fonction sous l' intégrale est prolongeable par continuité en 0, puis :

• $\forall\ x\geq 1,\ \left|\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\right|\leq\dfrac{2}{x^2}$, ce qui garantit son intégrabilité sur [1,+∞).

Enfin, on effectue dans la dernière intégrale le changement de variable : $x=2.t$, qui est strictement croissant et de classe C[1] et : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}.dx=2.\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(2.t)}{(2.t)^2}.dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}.dt$, d'où l'égalité demandée.

37. Soit : $\alpha\in\mathbb{R}$.

a. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^\alpha}.dx$ converge pour tout : $\alpha>0$.

b. Montrer que g_α, définie par : $\forall\ x\in[1,+\infty)$, $g_\alpha(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^\alpha}$, est intégrable sur [1,+∞) si et seulement si : $\alpha>1$.

a. La fonction sous l'intégrale est définie, continue sur [1,+∞).

De plus : $\forall\ x\geq 1,\ \displaystyle\int_1^x\frac{\sin(t)}{t^\alpha}.dt=\left[\frac{-\cos(t)}{t^\alpha}\right]_1^x-\alpha.\int_1^x\frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}.dt$.

La partie intégrée admet une limite finie en +∞ car : $\forall\ x\geq 1,\ \left|\dfrac{-\cos(x)}{x^\alpha}\right|\leq\dfrac{1}{x^\alpha}$, et : $\alpha>0$.

Enfin la nouvelle intégrale est absolument convergente car : $\forall\ t\geq 1,\ \left|\dfrac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\right|\leq\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$, et : $\alpha+1>1$.

Donc : $x\mapsto\displaystyle\int_1^x\frac{\sin(t)}{t^\alpha}.dt$, admet une limite finie en +∞ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^\alpha}.dx$ converge pour tout : $\alpha>0$.

b. • Si : $\alpha>1$, il est immédiat que g_α est intégrable sur [1,+∞), car : $\forall\ x\geq 1,\ \left|\dfrac{\sin(x)}{x^\alpha}\right|\leq\dfrac{1}{x^\alpha}$.

• Si : $\alpha\leq 1$, comme pour l'intégrale de Dirichlet : $\forall\ n\geq 2$,

$$\int_\pi^{n.\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|.dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k.\pi}^{(k+1).\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|.dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi\frac{\sin(u)}{(u+k.\pi)^\alpha}.du\geq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha.\pi^\alpha}.\int_0^\pi\sin(u).du=\frac{2}{\pi^\alpha}.\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha}.$$

Comme la série qui apparaît est divergente, on a donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\pi^{n.\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|.dt=+\infty$.

Une primitive de la fonction considérée est alors croissante sur [1,+∞) et ne peut tendre que vers +∞ en +∞ du fait de la limite précédente.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}.dt$ est donc divergente et la fonction g_α n'est pas intégrable sur [1,+∞).

38. Calcul de l'intégrale de Dirichlet.

Pour : $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2.n.t).\cos(t)}{\sin(t)}.dt$.

a. Calculer pour tout : $n\in\mathbb{N}^*$, la quantité $(I_{n+1}-I_n)$ et en déduire la valeur de I_n pour tout : $n\in\mathbb{N}^*$.

b. On pose, pour : $n\in\mathbb{N}^*$, $J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2.n.t)}{t}.dt$.

En utilisant le lemme de Lebesgue (voir exercices précédents), montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}[I_n-J_n]=0$.

c. En déduire la limite de (J_n) en +∞.

d. En transformant l'écriture de J_n, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}.dx$.

a. Notons que toutes les intégrales I_n convergent puisque les fonctions qui apparaissent sont définies, continues sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et prolongeables par continuité en 0.

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $\sin((2.n+2).t) - \sin(2.nt) = 2.\cos((2.n+1).t).\sin(t)$,

d'où : $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2.\cos((2.n+1).t).\cos(t).dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos((2.n+2).t) + \cos(2.n.t)].dt = 0$.

La suite (I_n) est donc constante à la valeur : $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2.\cos^2(t).dt = \left[t + \frac{\sin(2.t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

b. On commence par calculer : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2.n.t).\left[\frac{1}{t} - \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right].dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2.n.t).\varphi(t).dt$.

La fonction φ donnée par : $\forall\ t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$,

est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En effet :

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t}.(1 - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)).(1 - \frac{t^2}{6} + o_0(t^2))^{-1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t}.(1 - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)).(1 + \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)) = \frac{t}{3} + o_0(t),$$

ce qui montre que φ se prolonge par continuité en 0, avec : $\varphi(0) = 0$, et :

$$\forall\ t > 0\ ,\ \varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sin^2(t)} = \frac{1}{t^2}.\left(-1 + \left(1 - \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)\right)^{-2}\right) = \frac{1}{6} + o_0(1),$$

donc φ est dérivable en 0, $\varphi'(0) = \frac{1}{3}$, et φ' est continue en 0, donc φ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Le lemme de Lebesgue (exercice 7) s'applique et : $\lim_{n\to+\infty} [I_n - J_n] = 0$.

c. On en déduit, puisque (I_n) est constante donc convergente, que (J_n) converge et que : $\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

d. Enfin : $\forall\ n \geq 1$, $J_n = \int_0^{n.\pi} \frac{\sin(u)}{u}.du$, avec le changement de variable : $u = 2.n.t$,

et en faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut que : $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n.\pi} \frac{\sin(u)}{u}.du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}.du$,

puisque l'intégrale de Dirichlet est convergente.

Comparaison série – intégrale.

39. Pour : $\alpha < 1$, on note f_α la fonction définie sur $[1,+\infty)$, par : $\forall\ x \geq 1$, $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

En utilisant un encadrement par deux intégrales, trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, quand n tend vers $+\infty$.

Pour : $0 \leq \alpha < 1$, la fonction f_α est décroissante sur $[1,+\infty)$.

Donc : $\forall\ k \geq 1$, $\forall\ t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$,

puis en intégrant sur $[k, k+1]$: $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

Si maintenant, on somme pour k variant de 1 à n (avec : $n \geq 1$), on obtient :

$$\forall\ n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}, \text{ ou : } S_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n, \text{ avec : } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

On en déduit que : $\forall\ n \geq 1$, $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n$, et : $\forall\ n \geq 2$, $S_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t^\alpha}$.

Enfin : $\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} + 1$.

Donc l'encadrement précédent (avec le théorème des gendarmes) conduit à : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Remarque : l'équivalent redonne la divergence de la série.
Si maintenant : $\alpha < 0$, le principe est conservé, mais f_α est cette fois croissante, et on aboutit à :

$\forall\ n \geq 2,\ 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$, ce qui donne encore : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

40. Pour : $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, quand n tend vers $+\infty$.

Pour : $\alpha > 1$, la série de Riemann proposée est convergente.
Soit alors : $n \geq 1$, et : $k \geq n$.
On peut écrire : $\forall\ t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$,

et en intégrant sur $[k, k+1]$: $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

On somme alors pour k variant de n à : $N \geq n+1$, et : $\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$.

Toutes les quantités qui apparaissent ont une limite quand N tend vers $+\infty$ (série ou intégrale convergente), donc on en déduit par passage à la limite : $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

On reconnaît R_n à gauche et R_{n-1} à droite, et l'intégrale vaut : $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}.\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

D'où : $\forall\ n \geq 2$, $\frac{1}{\alpha-1}.\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha-1}.\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Enfin, les quantités encadrantes étant équivalentes entre elles en $+\infty$, on conclut que : $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

41. On note f la fonction définie de $[1,+\infty)$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall\ x \geq 1$, $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$.

a. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x).dx$ est convergente.

b. Pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = \int_n^{n+1} f(t).dt - f(n)$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ est absolument convergente.

c. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

a. On peut par exemple dire que f est définie et continue sur $[1,+\infty)$, puis :

$\forall\ A \geq 1$, $\int_1^A f(x).dx = \int_1^{\sqrt{A}} \frac{\sin(u)}{u^2}.2.u.du = 2.\int_1^{\sqrt{A}} \frac{\sin(u)}{u}.du$, avec le changement de variable : $x = u^2$.

Or cette intégrale a une limite quand A tend vers $+\infty$ (intégrale de Dirichlet) donc $\int_1^{+\infty} f(x).dx$ converge.

b. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $|w_n| = \left|\int_n^{n+1} (f(t) - f(n)).dt\right| \leq \int_n^{n+1} |f(t) - f(n)|.dt \leq \int_n^{n+1} |t-n|.M_n.dt$, où : $M_n = \max_{[n,n+1]} |f'|$.

Puis : $\forall\ x \geq 1,\ f'(x) = \frac{1}{2}.\frac{-\sqrt{x}.\cos(\sqrt{x}) + 2.\sin(\sqrt{x})}{x^2}$, et : $0 \leq M_n \leq \frac{\sqrt{n}+2}{2.n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2.n^{\frac{3}{2}}}$.

Donc : $|w_n| \leq \int_n^{n+1} M_n.dt = M_n$,

et on en déduit l'absolue convergence de $\sum_{n\geq 1} w_n$.

c. On a de plus : $\forall\ N \geq 1,\ \sum_{n=1}^{N} w_n = \int_1^{N+1} f(t).dt - \sum_{n=1}^{N} f(n)$, soit : $\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^{N+1} f(t).dt - \sum_{n=1}^{N} w_n$.

Les deux convergences obtenues (intégrale et série) montrent que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n)$ existe et est finie, ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ donc de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.