Séries Numériques (corrigé des indispensables).

Séries télescopiques.

1. La série proposée est clairement télescopique, construite avec la suite (a_n) donnée par :

   $\forall$ n $\in$ ℕ, $a_n = e^{\frac{1}{n}}$.

   Puisque (a_n) converge (vers 1), la série converge et sa somme vaut (e – 1).

2. Ecrivons comme proposé : (1 – x).u_n = $\dfrac{x^n - x^{n+1}}{(1-x^n).(1-x^{n+1})} = \dfrac{1}{(1-x^{n+1})} - \dfrac{1}{(1-x^n)}$,

   et la série apparaît bien comme télescopique en posant : $\forall$ n ≥ 1, $a_n = \dfrac{1}{(1-x^n)}$.

   Pour x dans l'intervalle proposé, (a_n) converge vers 1, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}(1-x).u_n$ converge et sa somme vaut : $\dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{x}{1-x}$.

   Puisque (1 – x) est non nul, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge aussi et sa somme est $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

3. On peut écrire : $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \ln(n^2-1) - \ln(n^2) = [\ln(n+1)-\ln(n)] - [\ln(n)-\ln(n-1)]$,

   et la série est bien télescopique en posant : $\forall$ n ≥ 2, a_n = ln(n) – ln(n – 1) $= -\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

   Puisque la suite (a_n) converge (vers 0), la série est donc convergente et sa somme vaut :
   a_2 – 0 = ln(2) – ln(1) = ln(2).
   Remarque : la convergence de la série pouvait être obtenue simplement avec un équivalent.

Séries à termes positifs ou de signe constant.

4. • La première série est à termes positifs et : $\dfrac{n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc la série diverge puisque la série harmonique diverge.

   • Pour la deuxième série, elle est encore à termes positifs et : $\dfrac{ch(n)}{ch(2.n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{e^{2.n}} = e^{-n}$.

   Comme cette dernière série est géométrique, de raison positive strictement intérieure à 1, elle converge et la série de départ aussi.

   • Utilisons un développement limité pour cette troisième série en écrivant :

   $\forall$ n ≥ 1, u_n = $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \ln(n^2+n+1) - \ln(n^2+n-1) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)$

   Puis par exemple : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = \left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) - \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2.n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   De même : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right) = \left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right) - \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{2.n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   Finalement : $u_n = \dfrac{2}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

   • Pour cette dernière série, on écrit simplement :

   $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n.\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2.n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e.\exp\left(-\dfrac{1}{2.n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = e.\left(1 - \dfrac{1}{2.n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Donc : $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Finalement, les deux séries sont toutes deux positives (également garanti à partir d'un certain rang) et la seconde est divergente, donc la série proposée l'est aussi.

5. • La première série converge car : $n^2.(n^2.e^{-\sqrt{n}}) = n^4.e^{-\sqrt{n}}$, tend vers 0 en $+\infty$.

• $\sum \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{ln(n).e^{2.n}}}$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0 (théorème des croissances comparées).

• $\sum \frac{1}{\mathrm{n}.\sqrt[n]{\mathrm{n}}}$ diverge car c'est une série à termes positifs et : $\frac{1}{n.\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{n}.\exp\left(-\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série proposée diverge.

6. On pose : $\mathrm{u_n} = \frac{\mathrm{n!.e^n}}{\mathrm{n^n}}.\mathrm{n}^\alpha$, où : $\alpha \in \mathbb{R}$, et : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

a. Tout d'abord, les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, donc (v_n) est bien définie.

Puis : $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1).n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)+1+\alpha.\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+1+\alpha.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

On utilise alors un développement limité de ln(1+u) à l'ordre 3 pour le premier logarithme et à l'ordre 2 pour l'autre, et :

$$v_n = -n.\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2.n^2}+\frac{1}{3.n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1+\alpha.\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2.n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \left(\alpha+\frac{1}{2}\right).\frac{1}{n}-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}\right).\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Distinguons alors plusieurs cas :

• $\alpha > -\frac{1}{2}$; on a : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\alpha+\frac{1}{2}\right).\frac{1}{n}$, et les deux séries ont des termes généraux de même signe (positif) à partir d'un certain rang, la seconde divergeant et la série $\sum v_n$ aussi.

• $\alpha < -\frac{1}{2}$; on a toujours : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\alpha+\frac{1}{2}\right).\frac{1}{n}$, et le même argument (pour des séries à termes négatifs cette fois) montre que la série $\sum v_n$ diverge encore.

• $\alpha = -\frac{1}{2}$; on a cette fois : $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12}.\frac{1}{n^2}$, et les deux séries ont des termes généraux de même signe (négatif) à partir d'un certain rang mais cette fois convergent.

b. Pour la valeur : $\alpha = -\frac{1}{2}$, la série $\sum v_n$ converge donc la suite $(\ln(u_n))$ converge vers une valeur réelle L.

Donc (u_n) converge vers : $C = e^L > 0$, ce qui s'écrit encore : $u_n \underset{+\infty}{\sim} C$, d'où l'équivalent (qui correspond au début de la formule de Stirling) : $n! \underset{+\infty}{\sim} C.n^n.e^{-n}.n^{-\left(-\frac{1}{2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} C.n^n.e^{-n}.\sqrt{n}$

7. Toutes les séries évoquées sont à termes réels positifs.

• pour la première, on peut écrire simplement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le \max(u_n,v_n) \le u_n + v_n$.

Donc par majoration (pour des séries à termes positifs), la série $\sum \max(u_n,v_n)$ converge.

• pour la deuxième, on a encore : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le \sqrt{u_n.v_n} \le \frac{u_n+v_n}{2}$, car : $\frac{u_n+v_n}{2} - \sqrt{u_n.v_n} = \frac{(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})^2}{2}$.

Donc à nouveau par majoration, la série $\sum \sqrt{u_n.v_n}$ converge.

• pour la troisième, on a toujours : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le \frac{u_n.v_n}{u_n+v_n} \le \frac{u_n+v_n}{2}$, car : $(u_n+v_n)^2 - 2.u_n.v_n = (u_n-v_n)^2$.

Une fois de plus par majoration, la série $\sum \frac{u_n.v_n}{u_n+v_n}$ converge.

8. a. Puisque $\sum u_n$ est à termes positifs, les termes de $\sum v_n$ sont définis et positifs.

Puis : $\forall$ n $\in$ ℕ, $0 \le \frac{u_n}{1+u_n} \le u_n$, donc par majoration de série à termes positifs, $\sum v_n$ converge.

b. Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge.
Alors son terme général tend vers 0.

De plus : $\forall$ n $\in$ ℕ, $u_n = \frac{v_n}{1-v_n} \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est donc convergente.

Séries de signe quelconque, sommes de séries.

9. La série est alors convergente, puisque somme de deux séries convergentes.
Notons ensuite : $\forall$ n $\in$ ℕ, $v_n = a_n + u_n$, où $\sum a_n$ est absolument convergente et $\sum u_n$ semi-convergente.
Si la série $\sum v_n$ était absolument convergente, on aurait :
$\forall$ n $\in$ ℕ, $u_n = v_n - a_n$, donc : $|u_n| \le |v_n| + |a_n|$, et la série $\sum (|v_n| + |a_n|)$ étant convergente, la série $\sum |u_n|$ serait aussi convergente ce qui n'est pas le cas.
Donc la série $\sum v_n$ n'est que semi-convergente.

10. • La première série est convergente puisque : $\forall$ n $\ge$ 1, $0 \le \frac{1}{(2.n+1)^2} \le \frac{1}{4.n^2}$, et par majoration la série considérée est bien convergente.

Puis : $\forall$ n $\ge$ 0, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2.k+1)^2} = \sum_{p=1}^{2.n+1} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2.p)^2} = \sum_{p=1}^{2.n+1} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}.\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = S_{2.n+1} - \frac{1}{4}.S_n$, où S_n est la somme partielle de la série dont on donne la somme.

En faisant tendre n vers +∞, on en déduit que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2.n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}.\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

• La seconde série est absolument convergente et : $\forall$ n $\ge$ 0, $\sum_{k=1}^{2.n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.k)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2.k+1)^2}$.

Donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.k)^2} - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2.k+1)^2} = \frac{1}{4}.\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{2}{24}.\pi^2 = -\frac{\pi^2}{12}$.

11. Pour les deux séries, plusieurs façons de montrer leur convergence :

• on peut écrire pour la première (comme pour la deuxième) : $\frac{n^2}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n.(n-1)}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(n-2)!}$, d'où la convergence de la série (par équivalence de séries à termes positifs), ou :

• $\lim_{n\to+\infty} n^2.\frac{n^2}{n!} = 0$, du fait du théorème des croissances comparées, d'où la convergence de la série.

Puis on écrit : $\forall$ n $\ge$ 2, $n^2 = n.(n-1) + n$, et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 0 + 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n.(n-1)+n}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n.(n-1)}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n!}$, puisque les deux séries qui apparaissent sont convergentes.

Enfin : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 1 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} = 1 + e + (e-1) = 2.e$, à l'aide de translations d'indice dans les deux dernières sommes de séries.

En travaillant de la même façon, et à partir de :
$\forall$ n $\ge$ 3, $n^3 - n = n.(n-1).(n-2) + 3.n^2 - 3.n = n.(n-1).(n-2) + 3.n.(n-1)$, on aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3-n}{n!}=0+0+\frac{6}{2!}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n.(n-1).(n-2)+3.n.(n-1)}{n!}=3+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n.(n-1).(n-2)}{n!}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{3.n.(n-1)}{n!}$$, et à nouveau : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3-n}{n!}=3+\sum_{p=3}^{+\infty}\frac{1}{p!}+3.\sum_{p=1}\frac{1}{p!}=3+e+3.(e-1)=4.e$.

12. • Pour : n = 4.k+2, on a, pour la première série : $2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\frac{n.\pi}{4}\right).x^n=2^{2.k+1}.x^{4.k+2}.(-1)^k=(-1)^k.2.x^2.(2.x^2)^{2.k}$.

   Si ce terme général ne tend pas vers 0, la série diverge donc une condition nécessaire pour qu'elle converge est : $|2.x^2|<1$, soit : $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   Pour ces valeurs de x, on peut alors écrire : $2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\frac{n.\pi}{4}\right).x^n=\frac{1}{2.i}.[(\sqrt{2}.x.e^{i.\frac{\pi}{4}})^n-(\sqrt{2}.x.e^{-i.\frac{\pi}{4}})^n]$.

   Les deux séries géométriques qui apparaissent sont alors convergentes (de raison en module strictement plus petites que 1) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\frac{n.\pi}{4}\right).x^n=\frac{1}{2.i}.[\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2}.x.e^{i.\frac{\pi}{4}})^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2}.x.e^{-i.\frac{\pi}{4}})^n]=\frac{1}{2.i}.\left[\frac{1}{1-\sqrt{2}.x.e^{i.\frac{\pi}{4}}}-\frac{1}{1-\sqrt{2}.x.e^{-i.\frac{\pi}{4}}}\right].$$

   En réduisant au même dénominateur, on aboutit à : $\forall\ |x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\frac{n.\pi}{4}\right).x^n=\frac{x}{1-2.x+2.x^2}$.

   • Pour la deuxième série, elle converge pour : x = 0, et sinon s'écrit : $\sum x^{2n+1}=x.\sum(x^2)^n$.

   x étant maintenant supposé non nul, ces séries ont même comportement et convergent si et seulement si : $|x^2|<1$, soit encore : $|x|<1$.

   Pour ces valeurs de x, on a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2.n+1}=x.\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n=\frac{x}{1-x^2}$

13. a. On utilise pour cela la formule du binôme de Newton et :

   $\forall$ n $\in$ ℕ, $(2+\varepsilon.\sqrt{3})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.2^{n-k}.\varepsilon^k.\sqrt{3}^k$, puis : $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.2^{n-k}.\sqrt{3}^k.(1+(-1)^k)$.

   Dans cette dernière somme ne restent que les k pairs (k = 2.p), et :

$$(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2.\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\binom{n}{2.p}.2^{n-2.p}.3^p,$$

   Enfin la somme étant un entier, la quantité proposée est bien un entier pair que l'on notera $2.N_n$.

   b. On peut alors écrire : $\forall$ n $\in$ ℕ, $u_n=\sin(2.N_n.\pi-\pi.(2-\sqrt{3})^n)=-\sin(\pi.(2-\sqrt{3})^n)$.

   Il est clair que la quantité dans le sinus tend vers 0 (suite géométrique) donc :

   $u_n\underset{+\infty}{\sim}-\pi.(2-\sqrt{3})^n$.

   Par équivalence de séries à termes négatifs, la série $\sum u_n$ converge, l'autre étant géométrique et convergente.

14. a. Notons tout d'abord que suivant P, la suite (u_n) présente un problème de définition.

   Il est nécessaire que le coefficient dominant de P soit positif car sinon, P deviendrait négatif à partir d'un certain rang.

   Dans le cas donc où le coefficient dominant de P (notons-le a) est positif, on peut alors écrire :

   $\forall$ n $\in$ ℕ, $P(n)=a.n^k+\ldots\underset{+\infty}{\sim}a.n^k$, où k désigne le degré de P.

   Cet équivalent garantit que P(n) devient positif pour n assez grand et que u_n est alors défini à partir de ce rang.

   Puis : $\sqrt{P(n)}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{a}.n^{\frac{k}{2}}$, et d'autre part : $\sqrt{n^2+1}\underset{+\infty}{\sim}n$.

Distinguons alors plusieurs cas :

- k < 2, alors $\sqrt{P(n)}$ est négligeable en $+\infty$ devant $\sqrt{n^2+1}$ et (u_n) tend vers $+\infty$: la série $\sum u_n$ diverge.
- k > 2, alors $\sqrt{n^2+1}$ devient négligeable devant $\sqrt{P(n)}$, et (u_n) tend vers $-\infty$: la série diverge encore.
- k = 2, et : a ≠ 1, on a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} (1-\sqrt{a}).n$, u_n à nouveau ne tend pas vers 0, et $\sum u_n$ diverge.

Finalement pour que la série converge, il faut que : k = 2, a = 1, soit : $P = X^2 + b.X + c$.

b. On peut sous la dernière hypothèse écrire :

$$\sqrt{P(n)} = \sqrt{n^2+b.n+c} = n.\left(1+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n.\left(1+\frac{b}{2}.\frac{1}{n}+\left(\frac{c}{2}-\frac{b^2}{8}\right).\frac{1}{n^2}+\left(-\frac{b.c}{4}+\frac{b^3}{16}\right).\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right), \text{ et :}$$

$$\sqrt{n^2+1} = n.\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n.\left(1+\frac{1}{2.n^2}+o\left(\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right).$$

D'où : $u_n = \left(-\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{c}{2}+\frac{b^2}{8}\right).\frac{1}{n}+\left(\frac{b.c}{4}-\frac{b^3}{16}\right).\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On doit donc prendre : b = 0, pour que u_n tende vers 0.

Si : c ≠ 1, alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}-\frac{c}{2}\right).\frac{1}{n}$, et la série $\sum u_n$ a son terme général équivalent à celui d'une série de signe constant et divergente, et à ce titre diverge.

Donc on doit prendre : c = 1, et dans ce cas : ∀ n ∈ ℕ, $u_n = 0$, et la série $\sum u_n$ converge.

Conclusion : la série converge si et seulement si : $P = X^2 + 1$, et la série est alors la série nulle.

Remarque : le développement limité (si u_n n'avait pas été constamment nul) nous aurait permis dans tous les cas de déterminer la nature de $\sum u_n$ qui aurait été alors convergente, grâce à un équivalent.

15. On peut utiliser des développements limités en $+\infty$, et :

∀ n ≥ 1, $\ln(n)+a.\ln(n+1)+b.\ln(n+2) = (1+a+b).\ln(n)+a.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b.\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$, soit :

∀ n ≥ 1, $\ln(n)+a.\ln(n+1)+b.\ln(n+2) = (1+a+b).\ln(n)+(a+2.b).\frac{1}{n}-\frac{a+4.b}{2}.\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc il est nécessaire que : a + b + 1 = 0, pour que (u_n) tende vers 0.

Si cette condition est remplie et si : a + 2.b ≠ 0, le terme général de la série est équivalent à celui d'une série de signe constant et divergente $\left(\sum (a+2.b).\frac{1}{n}\right)$, donc $\sum u_n$ diverge.

On doit donc choisir : a + b + 1 = 0, a + 2.b = 0, soit : b = 1, a = -2.

Dans ce cas : $u_n = -\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$, et la série $\sum u_n$ converge.

Pour calculer sa somme on peut revenir à des sommes partielles ou remarquer que :

∀ n ≥ 1, u_n = [ln(n) – ln(n+1)] – [ln(n+1) – ln(n+2)], soit le terme général d'une série télescopique.

Finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = [\ln(1)-\ln(2)] - \lim_{n\to+\infty}[\ln(n)-\ln(n+1)] = -\ln(2)$.

Produit infini.

16. a. On peut commencer par remarquer que : ∀ N ∈ ℕ, $\ln(P_N) = \ln(\prod_{n=0}^{N} u_n) = \sum_{n=0}^{N} \ln(u_n)$.

- si on suppose (P_N) convergente vers L non nulle, la continuité de ln en L montre que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ converge vers ln(L) et la série $\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ converge.
- si on suppose que la série $\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ converge vers L, alors la suite $(\ln(P_N))$ converge vers L et par continuité de exp en L, (P_N) converge vers e^L qui est bien non nulle.

b. Si (P_N) tend vers 0, la suite $(\ln(P_N))$ tend vers $-\infty$, et la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ diverge vers $-\infty$: dans ce cas, la série $\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ diverge.

Séries alternées et autour des séries alternées.

17. • La première série est définie pour : $n \geq 2$, et est bien alternée puisqu'alors le dénominateur garde un signe constant.

Puis : $\forall$ n ≥ 2, $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n}.\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{-1} = \dfrac{(-1)^n}{n}.\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Si on note u_n le terme général de cette série, alors u_n apparaît comme la somme de deux termes :

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, et $\sum_{n\geq 2} a_n$ converge du fait du critère spécial,

$b_n = -\dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$, et $\sum_{n\geq 2} b_n$ converge, par comparaison de séries à termes négatifs.

Finalement $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

• Pour la deuxième série, elle est encore alternée puisque l'argument du cosinus reste entre 0 et $\pi/2$.

Puis : $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\left(1+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$.

A nouveau le terme général v_n de la série s'écrit encore : $u_n = a_n + b_n$, avec $\sum a_n$ convergente du fait du critère spécial, et $\sum b_n$ absolument convergente car de terme général négligeable devant celui d'une série absolument convergente, donc convergente.

Autrement dit, la série proposée converge.

• Pour la troisième série, elle est alternée à partir du rang 2, et :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1+\frac{(-1)^n.\sqrt{n+1}}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}, \text{ et :}$$

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.(1+o(1))\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n.\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n.\sqrt{n}}\right).$$

Le terme général de la série s'écrit à nouveau : $u_n = a_n + b_n$, avec $\sum a_n$ convergente du fait du critère spécial, et $\sum b_n$ absolument convergente avec un équivalent.

Donc la série converge.

Vrai-faux.

18. • ($\sum u_n$ converge) $\Rightarrow$ (u_n^2 converge) : implication vraie car si $\sum u_n$ converge, (u_n) tend vers 0 et (u_n^2) aussi.

• ($\sum u_n$ diverge) $\Rightarrow$ ($\sum u_n^2$ diverge) : implication fausse car $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$ diverge et $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge.

• ($\sum u_n$ converge, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$) $\Rightarrow$ ($\sum u_n^2$ converge) : affirmation vraie car (par exemple) si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) tend vers 0, et : $u_n^2 = u_n.u_n = o(u_n)$.

Or $\sum u_n$ est absolument convergente (car à termes positifs et convergente) donc $\sum u_n^2$ converge.

• ($\sum u_n$ convergente, et : $\forall$ n ≥ 0, $u_n \neq -1$) $\Rightarrow$ ($\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ convergente) : implication fausse comme le montre le contrexemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, pour : n ≥ 2.

En effet, dans ce cas, le terme général de la deuxième série s'écrit : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$,

et ce terme général est la somme des termes généraux d'une série semi-convergente et d'une série divergente.

Remarque : l'implication devient vraie si (u_n) est à termes positifs, car si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) tend vers 0 et : $\frac{u_n}{1+u_n} \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

Autour de la série harmonique.

19. On commence par remarquer que : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$* : $u_n = H_{2.n} - H_n = \ln(2.n) + \gamma + \varepsilon(2.n) - (H_n + \gamma + \varepsilon(n))$, et :
$u_n = \ln(2) + \varepsilon(2.n) - \varepsilon(n)$.
(u_n) est donc convergente de limite ln(2).
Remarque : on peut également obtenir ce résultat par exemple avec des sommes de Riemann.

20. a. On se souvient que : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$, que l'on peut redémontrer par récurrence.

b. Puis : $\frac{1}{1^2+2^2+...+n^2} = \frac{6}{n.(n+1).(2.n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^3}$, d'où la convergence, par comparaison de séries à termes positifs.

c. Enfin : $\frac{6}{X.(X+1).(2.X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2.X+1}$, et : a = 6, b = 6, c = -24.

On revient ensuite aux sommes partielles pour écrire :

$\forall$ N $\geq$ 2, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{6}{n.(n+1).(2.n+1)} = 6.\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 6.\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} - 24.\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2.n+1}$.

De plus : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2.n+1} = \sum_{n=1}^{2.N+1}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2.n} - 1$.

On termine avec : $S_N = 6.H_N + 6.(H_{N+1} - 1) - 24.(H_{2.N+1} - \frac{H_N}{2})$, et :

$S_N = 18.[\ln(N) + \gamma + \varepsilon(N)] + 6.[\ln(N+1) + \gamma + \varepsilon(N+1) - 1] - 24.[\ln(2.N+1) + \gamma - 1 + \varepsilon(2.N+1)]$, puis :

$S_N = 18 - 24.\ln(2) + 6.\ln\left(1+\frac{1}{N}\right) - 24.\ln\left(1+\frac{1}{2.N}\right) + 18.\varepsilon(N) + 6.\varepsilon(N+1) - 24.\varepsilon(2.N+1)$,

et finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+...+n^2} = \lim_{N\to+\infty} S_N = 18 - 24.\ln(2)$.