Séries Numériques (corrigé des classiques).

Séries à termes positifs ou de signe constant.

20. • Pour la première série, on peut écrire :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \exp\left(-n^2.\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n^2.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n^2.\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-n+o(n)).$$

Donc : $n^2.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \exp(-n+o(n)+2.\ln(n)) = \exp(-n+o(n))$, qui tend vers 0 en +∞.

Donc la série $\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

• Pour la deuxième, on écrit : $(n^a+1)^{\frac{1}{a}} = n.\left(1+\frac{1}{n^a}\right)^{\frac{1}{a}} = n.\left(1+\frac{1}{a}.\frac{1}{n^a}+o\left(\frac{1}{n^a}\right)\right) = n+\frac{1}{a}.\frac{1}{n^{a-1}}+o\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$.

On distingue alors plusieurs cas :

si : a = b, la série est la série nulle et converge,

si : a > b, on a : $u_n = (n^a+1)^{\frac{1}{a}} - (n^b+1)^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{a}.\frac{1}{n^{a-1}}+o\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)-\frac{1}{b}.\frac{1}{n^{b-1}}+o\left(\frac{1}{n^{b-1}}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{b}.\frac{1}{n^{b-1}}$.

Par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum_{n\geq1} u_n$ converge si et seulement si : b – 1 > 1, soit : b > 2.

si : a < b, on a de même : $u_n \underset{+\infty}{=\sim} \frac{1}{a}.\frac{1}{n^{a-1}}$, et la série $\sum_{n\geq1} u_n$ converge si et seulement si : a > 2.

Conclusion : la série converge si et seulement si : (a = b) ou (2 < a, et : 2 < b).

• Pour la troisième, on réécrit le terme général :

$$\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = \exp(-\ln(n).\ln(\ln(n))) = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}.$$

Et puisque (ln(ln(n))) tend vers +∞, il existe un rang n_0 à partir duquel : ln(ln(n)) ≥ 2, soit :

$\forall$ n ≥ n_0, $0 \leq \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}} \leq \frac{1}{n^2}$,

et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ converge.

21. a. S_N étant une somme partielle de série, pour que la suite (S_N) converge, il est nécessaire que son terme général tende vers 0.
Or :
- (|x| > 1) ⇒ (n.|x|^n tend vers +∞),
- (|x| = 1) ⇒ (n.|x|^n tend vers +∞).

Donc on doit prendre : |x| < 1.

b. A partir de là, et pour : |x| < 1, on a : $(1-x).S_N = \sum_{n=1}^{N} n.x^n - \sum_{n=1}^{N} n.x^{n+1} = \sum_{n=1}^{N} n.x^n - \sum_{n=2}^{N+1}(n-1).x^n$.

En regroupant ce qu'on peut regrouper : $(1-x).S_N = \sum_{n=1}^{N} n.x^n - \sum_{n=2}^{N+1}(n-1).x^n = x + \sum_{n=2}^{N} x^n - N.x^{N+1}$.

Si on fait tendre N vers +∞, on conclut que ((1 – x).S_N) converge et : $(1-x).S = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{x}{1-x}$.

Finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty} n.x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

22. a. On montre de façon immédiate par récurrence que :
$\forall$ n ∈ ℕ, u_n existe et est strictement positif.

Dans ce cas : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n} \geq 0$, et (u_n) est bien croissante.

b. Supposons que (u_n) converge.
Alors puisque la suite est strictement croissante, sa limite L est supérieure à u_0, donc : L > 0.

Mais alors : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{L}$.

Les deux séries $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum \dfrac{a_n}{L}$ étant à termes positifs, elles ont alors même comportement.

Or la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge puisque la suite (u_n) converge, donc la série $\sum \dfrac{a_n}{L}$ puis la série $\sum a_n$ convergent aussi.

c. Réciproquement, si $\sum a_n$ converge, on commence par dire que : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n$ (puisque (u_n) est croissante), et : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n} \leq \dfrac{a_n}{u_0}$.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge et la suite (u_n) est convergente.

23. a. On peut réécrire l'hypothèse en : $\forall$ $n \geq n_0$, $0 \leq \dfrac{u_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{\alpha_n} \leq C = \dfrac{u_{n_0}}{\alpha_{n_0}}$.

Donc on a bien : $u_n = O(\alpha_n)$, en $+\infty$ (soit $\left(\dfrac{u_n}{\alpha_n}\right)$ bornée).

b. D'où : ($\sum \alpha_n$ converge) $\Rightarrow$ ($\sum u_n$ converge), par comparaison de séries à termes positifs.

24. a. Notons tout d'abord que suivant P, la suite (u_n) présente un problème de définition.
Notons a le coefficient dominant de P et k son degré.
Alors : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $P(n) = a.n^k + \ldots \underset{+\infty}{\sim} a.n^k$, avec donc : $a \neq 0$.

Si a est strictement négatif, alors la limite de P en $+\infty$ serait : a < 0, pour : k = 0, ou $-\infty$ pour : $k \geq 1$.
Donc pour n assez grand, P(n) serait négatif et la suite (u_n) ne serait définie que pour un nombre fini de termes : il est donc nécessaire que : a > 0, et l'équivalent précédent garantit alors que P(n) devient positif pour n assez grand et que u_n est alors défini à partir de ce rang.

Puis : $\sqrt{P(n)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{a}.n^{\frac{k}{2}}$, et d'autre part : $\sqrt{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} n$.

Distinguons alors plusieurs cas :

- k < 2, alors $\sqrt{P(n)}$ est négligeable en $+\infty$ devant $\sqrt{n^2+1}$ et (u_n) tend vers $+\infty$: la série $\sum u_n$ diverge.
- k > 2, alors $\sqrt{n^2+1}$ devient négligeable devant $\sqrt{P(n)}$, et (u_n) tend vers $-\infty$: la série diverge encore.
- k = 2, et : $a \neq 1$, on a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} (1-\sqrt{a}).n$, u_n à nouveau ne tend pas vers 0, et $\sum u_n$ diverge.

Finalement pour que la série converge, il faut que : k = 2, a = 1, soit : $P = X^2 + b.X + c$.

b. On peut sous la dernière hypothèse écrire :

$$\sqrt{P(n)} = \sqrt{n^2+b.n+c} = n.\left(1+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n.\left(1+\frac{b}{2}.\frac{1}{n}+\left(\frac{c}{2}-\frac{b^2}{8}\right).\frac{1}{n^2}+\left(-\frac{b.c}{4}+\frac{b^3}{16}\right).\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right), \text{ et :}$$

$$\sqrt{n^2+1} = n.\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n.\left(1+\frac{1}{2.n^2}+o\left(\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right).$$

D'où : $u_n = \left(-\dfrac{b}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{c}{2}+\dfrac{b^2}{8}\right).\dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{b.c}{4}-\dfrac{b^3}{16}\right).\dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On doit donc prendre : b = 0, pour que u_n tende vers 0.

Si : c ≠ 1, alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}-\frac{c}{2}\right).\frac{1}{n}$, et la série $\sum u_n$ a son terme général équivalent à celui d'une série de signe constant et divergente, et à ce titre diverge.
Donc on doit prendre : c = 1, et dans ce cas : ∀ n ∈ ℕ, $u_n = 0$, et la série $\sum u_n$ converge.
Conclusion : la série converge si et seulement si : $P = X^2 + 1$, et la série est alors la série nulle.

Séries de signe quelconque, somme de séries convergentes.

25. a. Tout d'abord : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{x}.\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) = \frac{n+1}{x}.\left(\frac{x}{n+1}-\frac{x^2}{2.(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1-\frac{x}{2.(n+1)}+o\left(\frac{1}{n}\right)$,

ce qui donne encore : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{x}{2.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Puis : ∀ n ≥ 1, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1-\frac{x}{2.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{x}{2.n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x}{2.n}$.

Par équivalence avec une série de signe constant (x > 0), la série $\sum(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n))$ diverge vers -∞ et la suite $(\ln(u_n))$ aussi.
Donc (u_n) tend vers 0.

b. Pour α donné, on a : $\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\alpha.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\frac{x}{2.n}-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par comparaison de séries à termes de signe constant, pour que la série converge, il faut que :
$\alpha+\frac{1}{2}=0$, soit : $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Pour cette valeur de α, le terme général s'écrit : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)-\alpha.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{A}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où A est une constante et ce terme est la somme des termes de deux suites absolument convergentes.
On en déduit que cette valeur de α conduit bien à une série convergente.

Remarque : c'est un cas où la notation $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (« grand O ») est pratique.

c. La série précédente a pour terme général celui d'une série télescopique car :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)-\alpha.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = [\ln(u_{n+1})-\alpha.\ln(n+1)]-[\ln(u_n)-\alpha.\ln(n)].$$

Puisque cette série converge, on en déduit que la suite $[\ln(u_n) - \alpha.\ln(n)]$ converge vers une limite notée L, et $(u_n.n^{-\alpha})$ converge vers : $A = e^L$, soit : $u_n.n^{-\alpha} \underset{+\infty}{\sim} A$, ou encore : $u_n \underset{+\infty}{\sim} A.n^{\alpha}$.

d. Par comparaison de séries à termes positifs (et puisque : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{A}{\sqrt{n}}$), la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

26. Notons, pour : n ∈ ℕ : $P_n = \prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Alors : ∀ n ≥ 1, on a : $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).P_n = \frac{1}{2}.\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right).P_{n-1}$, et par récurrence : $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).P_n = \frac{1}{2^n}.\sin(x).P_0$.

Donc : ∀ n ∈ ℕ, $\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(P_n) = \ln\left(\frac{1}{2^n}\right)-\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)+\ln(\sin(x))+\ln(P_0)$, pour : x ≠ 0, et :

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = -\ln\left(2^n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)+\ln(\sin(x))+\ln(\cos(x)).$$

Or quand n tend vers +∞, la suite $\left(\ln\left(2^n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)\right)$ tend vers ln(x) (avec un équivalent).

Donc la série converge et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)=-\ln(x)+\ln(\sin(x))+\ln(\cos(x))=\ln\left(\frac{\sin(x).\cos(x)}{x}\right)=\ln\left(\frac{\sin(2.x)}{2.x}\right).$$

27. Un équivalent du terme général donne la convergence de la série : $\frac{2.n-1}{n.(n^2-1)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{n^2}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série proposée converge.

Puis : $\frac{2.X-1}{X.(X-1).(X+1)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}$, puis : a = 1, b = $\frac{1}{2}$, c = $-\frac{1}{2}$, d'où :

$\forall$ n ≥ 2, $\sum_{k=2}^{n}\frac{2.k-1}{k.(k^2-1)}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}.\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}.\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}.\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

On simplifie alors la partie commune aux trois sommes et :

$\forall$ n ≥ 2, $\sum_{k=2}^{n}\frac{2.k-1}{k.(k^2-1)}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{n}-\frac{1}{2}.\frac{1}{n+1}$.

En passant à la limite, on en déduit la somme de la série qui vaut $\frac{5}{4}$.

28. a. On peut par exemple travailler par récurrence sur N :

- pour : N = 1, on a : $\sum_{n=1}^{N}\frac{z_n}{n}=z_1$, et : $\sum_{n=1}^{N}\frac{S_n}{n.(n+1)}+\frac{S_N}{N+1}=\frac{S_1}{1.2}+\frac{S_1}{2}=S_1=z_1$., d'où l'égalité.
- si on suppose l'égalité vraie pour un : N ∈ ℕ*, donné, alors :

$$\sum_{n=1}^{N+1}\frac{S_n}{n.(n+1)}+\frac{S_{N+1}}{N+2}=\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{z_n}{n}-\frac{S_N}{N+1}\right)+\frac{S_{N+1}}{(N+1).(N+2)}+\frac{S_{N+1}}{N+2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{z_n}{n}+\frac{S_{N+1}}{N+1}-\frac{S_N}{N+1},$$

et comme : $\frac{S_{N+1}}{N+1}-\frac{S_N}{N+1}=\frac{z_{N+1}}{N+1}$, on en déduit l'égalité voulue au rang N+1, ce qui termine la récurrence.

b. Puisque la série $\sum z_n$ converge, la suite (S_n) est convergente donc bornée.

Par conséquent, la suite $\left(\frac{S_N}{N+1}\right)$ converge vers 0.

De plus, si on note A un majorant de $|S_N|$, alors : $\forall$ n ∈ ℕ*, $\left|\frac{S_n}{n.(n+1)}\right|\leq\frac{A}{n^2}$, et la série $\sum\frac{S_n}{n.(n+1)}$ est absolument convergente, donc convergente.

Finalement la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq1}\frac{z_n}{n}$ converge, et la série $\sum_{n\geq1}\frac{z_n}{n}$ converge.

Produit infini.

29. a. Pour : N ≥ 2, tous les termes du produit qui composent P_N sont strictement positifs et P_N l'est aussi.

De plus : $\forall$ N ≥ 2, $\ln\left(\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)=\sum_{n=2}^{N}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Si on note u_n le terme qui apparaît dans la somme, alors : $u_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Or la série $\sum_{n\geq2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge du fait du critère spécial et la série $\sum_{n\geq2}\left(-\frac{1}{2.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ diverge vers $-\infty$ par comparaison de séries à termes négatifs.

Donc la suite ($\ln(P_N)$) diverge vers $-\infty$ et (P_N) tend vers 0.

Remarque : l'écriture « intuitive » qu'on aurait pour ce résultat : $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=0$, montre qu'il faut être prudent car ce « produit » (ça n'en est pas un) est nul alors que tous ses termes sont non nuls.

b. Si on pousse le développement de u_n à un ordre de plus, on obtient :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2.n} + \frac{(-1)^n}{3.n.\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n.\sqrt{n}}\right) = a_n + b_n + c_n.$$

Les séries $\sum a_n$ et $\sum c_n$ convergent (la deuxième par absolue convergence), et donc :

$$\ln(P_N) = \sum_{n=2}^{N} a_n + \sum_{n=2}^{N} b_n + \sum_{n=2}^{N} c_n = L_a - \frac{1}{2}.\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 1\right) + L_c + o(1) = -\frac{1}{2}.\ln(N) + K + o(1)$$, d'où :

$$P_N = \frac{1}{\sqrt{N}}.e^{K+o(1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^K}{\sqrt{N}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{N}}$$, avec : $C = e^K \in \mathbb{R}^*$.

30. Remarquons tout d'abord que : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\ln(P_N) = \sum_{n=0}^{N} \ln(1+u_n)$, et travaillons par double implication :

- si (P_N) converge, et puisque tous les termes du produit sont supérieurs à 1, la limite P de (P_N) est supérieure à 1.
  La série $\sum \ln(1+u_n)$ converge alors vers ln(P) et son terme général tend vers 0.
  Mais alors : $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$, et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
- si la série $\sum u_n$ converge, alors son terme général tend vers 0 et : $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$.
  Donc la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge, et la suite $\ln(P_N)$ aussi, ce qui entraîne la convergence de (P_N).

Séries alternées et autour de la série alternée.

31. *Attention à ne pas se contenter d'un équivalent.*

On peut écrire : $(-1)^n.\sqrt[n]{n}.\sin\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n.\frac{\sqrt[n]{n}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}.\sqrt[n]{n}}{3.n^3} + o\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n^3}\right)$.

On écrit ainsi le terme général u_n comme la somme de deux termes, a_n et b_n.

La deuxième série converge par absolue convergence puisque : $|b_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}.\sqrt[n]{n}}{3.n^3} + o\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n^3}\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[n]{n}}{3.n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3.n^3}$.

En effet, la suite $(\sqrt[n]{n})$ tend vers 1.
La première est alternée.
Posons alors f la fonction : $x \mapsto x^{1-x} = \exp((1-x).\ln(x)$, et étudions-la sur]0,1].

Elle y est dérivable et : $\forall x \in]0,1]$, $f'(x) = \left(-\ln(x) + \frac{1-x}{x}\right).f(x)$.

On pose alors : $g(x) = -\ln(x) + \frac{1}{x} - 1$, sur]0,1], et : $g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$.

g est donc décroissante sur]0,1] et s'annule en 1 : elle reste positive sur l'intervalle.
On en déduit que f' est positive et f est donc croissante sur]0,1].

La série $\sum a_n$, avec : $\forall n \geq 1$, $a_n = (-1)^n.\frac{\sqrt[n]{n}}{n} = (-1)^n.\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{n}} = (-1)^n.f\left(\frac{1}{n}\right)$, vérifie donc le critère spécial des séries alternées et est donc convergente.

Finalement la série proposée $\sum (-1)^n.\sqrt[n]{n}.\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

32. La série proposée est alternée.

De plus : $\forall n \geq 0$, $\frac{8^{n+1}}{(2.n+2)!}.\frac{(2.n)!}{8^n} = \frac{8}{(2.n+1).(2.n+2)} = \frac{4}{(2.n+1).(n+1)}$,

et ce quotient est plus petit que 1 dès que : $n \geq 1$.
Donc la série vérifie les hypothèses du critère spécial à partir du rang 1.

On peut alors écrire : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n.8^n}{(2.n)!} = 1 - 4 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n.8^n}{(2.n)!} = -3 + S'$, avec : $S' = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n.8^n}{(2.n)!}$, S' positif et :

$|S'| \leq \left| \frac{8^2}{4!} \right| = \frac{64}{24} = \frac{8}{3} < 3$.

Donc : S < 0.

Autour de la série harmonique.

33. a. On peut penser à comparer S_n à H_n.

Pour cela : $S_n - H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{k.(k+\sqrt{k})}$.

Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n.(n+\sqrt{n})}$ converge par comparaison de séries à termes positifs, donc la suite de ses sommes partielles est bornée.

Donc : $\frac{S_n}{\ln(n)} = \frac{H_n}{\ln(n)} + \frac{s_n}{n}$, avec $\left(\frac{H_n}{\ln(n)}\right)$ qui tend vers 1 et $\left(\frac{a_n}{\ln(n)}\right)$ qui tend vers 0.

Donc : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

b. On peut être plus précis puisque le fait que $(S_n - H_n)$ converge s'écrit aussi :

$\exists$ K $\in \mathbb{R}$, $S_n - H_n = K + o(1)$, en $+\infty$,

et comme : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, finalement : $S_n = \ln(n) + (K + \gamma) + o(1)$, soit bien : $S_n = \ln(n) + C + \varepsilon(n)$, où C est une constante, et $(\varepsilon(n))$ tend vers 0 en $+\infty$.