

1. Séries de réels et de complexes.

- Définition 1.1 : série de réels ou de complexes
- Définition 1.2 : série convergente ou divergente
- Remarque : influence des premiers termes d'une série sur la convergence
- Théorème 1.1 : condition nécessaire de convergence
- Théorème 1.2 : critère de divergence grossière
- Théorème 1.3 : série géométrique complexe
- Définition 1.3 : série télescopique
- Théorème 1.4 : convergence d'une série télescopique
- Théorème 1.5 : combinaison linéaire de séries convergentes
- Théorème 1.6 : équivalence de convergence en cas de produit par un scalaire non nul
- Théorème 1.7 : cas de trois séries liées par une somme
- Théorème 1.8 : lien entre convergence d'une série complexe et celle de ses parties réelle et imaginaire

2. Séries de réels positifs.

- Théorème 2.1 : premier critère de convergence pour les séries à termes réels positifs
- Théorème 2.2 : règle des majorants

3. Séries réelles de signe quelconque, séries complexes.

- Définition 3.1 : série réelle ou complexe absolument convergente
- Théorème 3.1 : lien entre convergence et absolue convergence
- Définition 3.2 : série semi-convergente
- Théorème 3.2 : règle des équivalents
- Théorème 3.3 : séries de Riemann
- Théorème 3.4 : règle des « grands O », des « petits o »
- Théorème 3.5 : règle des « n^α »
- Théorème 3.6 : règle de d'Alembert
- Théorème 3.7 : exponentielle complexe

4. Séries réelles alternées.

- Définition 4.1 : série alternée
- Théorème 4.1 : critère spécial des séries alternées

5. Compléments.

- Théorème 5.1 : (*hors programme*) séries de Bertrand
- Définition 5.1 : produit de Cauchy de deux séries
- Théorème 5.2 : convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes
- Théorème 5.3 : constante d'Euler
- Théorème 5.4 : formule de Stirling

1. Séries de réels et de complexes.

Définition 1.1 : série de réels ou de complexes

Soit (u_n) une suite de réels ou de complexes.

On appelle série de terme général u_n , la suite (S_N) définie par : $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

La suite (S_N) est aussi appelée suite des sommes partielles de la série.

On la note encore $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Définition 1.2 : série convergente ou divergente

Soit (u_n) une suite de réels ou de complexes.

On dit que la série de terme général u_n converge, si et seulement si la suite (S_N) est convergente.

Sa limite se note alors : $S = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et est appelée « somme de la série ».

Si une série n'est pas convergente, on dit qu'elle diverge.

En cas de convergence, on appelle reste d'ordre N de la série la quantité : $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$, et la suite (S_N) tend vers 0.

Remarque :

Les premiers termes n'interviennent pas pour la convergence d'une série.

Tous les critères de convergence restent donc valables si les conditions demandées sont remplies « à partir d'un certain rang ».

En cas de convergence, la valeur des premiers termes en revanche influe sur la somme de la série.

Théorème 1.1 : condition nécessaire de convergence

Si la série réelle ou complexe $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0 à l'infini.

Démonstration :

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (S_N) de ses sommes partielles par définition converge, donc la suite $(S_N - S_{N-1})_{N \geq 1}$ tend vers 0.

Or : $\forall N \geq 1, S_N - S_{N-1} = u_N$, et la suite (u_n) tend vers 0.

Théorème 1.2 : critère de divergence grossière

Si la suite réelle ou complexe (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration :

C'est la contraposée de l'implication précédente.

Théorème 1.3 : série géométrique complexe

Soit : $z \in \mathbb{C}$.

Alors $\sum z^n$ converge si et seulement si : $|z| < 1$, et dans ce cas, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Démonstration :

Pour : $z = 1$, la série géométrique diverge, puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Pour : $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$, on a : $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$, et cette suite converge si et seulement si : $|z| < 1$.

De plus, dans ce cas, la somme de la série vaut : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$.

Définition 1.3 : série télescopique

Une série réelle ou complexe $\sum u_n$ est dite télescopique lorsque son terme général peut se mettre sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_{n+1} - a_n$, où (a_n) est une suite de réels ou de complexes.

Théorème 1.4 : convergence d'une série télescopique

Une série télescopique réelle ou complexe $\sum u_n$, avec : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_{n+1} - a_n$, converge si et seulement si (a_n) est une suite convergente.

Dans ce cas, on a : $(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n) - a_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration :

Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = a_{n+1} - a_0$, et l'équivalence ainsi que la valeur de la limite en découle.

Théorème 1.5 : combinaison linéaire de séries convergentes

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries réelles ou complexes convergentes, et : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{C}^2 .

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \alpha \cdot u_n + \beta \cdot v_n$.

Alors $\sum w_n$ est une série convergente et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \alpha \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration :

En notant $(U_n), (V_n), (W_n)$ les suites de sommes partielles des séries $\sum u_n, \sum v_n$, et $\sum w_n$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \alpha \cdot U_n + \beta \cdot V_n$, et le résultat se déduit du résultat identique sur les suites.

Théorème 1.6 : équivalence de convergence en cas de produit par un scalaire non nul

Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe, α un scalaire réel ou complexe non nul.

Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \alpha \cdot u_n$, et dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \cdot u_n = \alpha \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration :

- Si $\sum u_n$ converge alors $\sum \alpha \cdot u_n$ aussi comme cas particulier du théorème précédent.
- Si $\sum \alpha \cdot u_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi en la multipliant par $\frac{1}{\alpha}$.

Théorème 1.7 : cas de trois séries liées par une somme

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries réelles ou complexes, et : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + v_n$.

Alors si deux des trois séries $\sum u_n, \sum v_n, \sum w_n$, convergent, la troisième converge aussi.

Si l'une diverge, au moins l'une des deux autres diverge.

Démonstration :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum w_n$ aussi comme somme de deux séries convergentes.

Si $\sum u_n$ (par exemple) et $\sum w_n$ convergent, alors $\sum v_n$ aussi, comme différence.

La dernière affirmation est la contraposée de la précédente.

Théorème 1.8 : lien entre convergence d'une série complexe et celle de ses parties réelle et imaginaire

Soit $\sum z_n$ une série complexe, avec : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = a_n + i \cdot b_n$, où : $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $\sum z_n$ converge si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Démonstration :

En appelant $(A_n), (B_n)$ et (Z_n) les suites de sommes partielles associées, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = A_n + i.B_n$, et le résultat découle du même résultat sur les suites complexes.

2. Séries de réels positifs.

Définition 3.1 : série réelle ou complexe absolument convergente

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 2.1 : premier critère de convergence pour les séries à termes réels positifs

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

Elle converge, si et seulement si la suite (S_N) de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration :

La suite (S_N) est croissante puisque : $\forall N \in \mathbb{N}, S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$.

Donc la suite (S_N) converge si et seulement si elle est majorée.

Définition 3.2 : série semi-convergente

On dit qu'une série réelle ou complexe est semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

Théorème 2.2 : règle des majorants

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs, telles que :

- $\sum u_n$ converge,
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_n \leq u_n$.

Alors $\sum v_n$ converge et : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration :

Notons : $\forall N \geq n_0, U_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$, et : $V_N = \sum_{n=n_0}^N v_n$. On a alors : $\forall N \geq n_0, V_N \leq U_N$.

Or la série (à termes positifs) $\sum u_n$ converge, donc la suite de ses sommes partielles (même en commençant à n_0) est majorée par un réel M , et : $\forall N \geq n_0, V_N \leq M$.

La suite (V_N) est alors croissante et majorée par M donc convergente.

En passant à la limite dans l'inégalité sur les sommes partielles, on en déduit la dernière inégalité.

3. Séries réelles de signe quelconque, séries complexes.

Théorème 3.1 : lien entre convergence et absolue convergence

Une série $\sum u_n$ réelle ou complexe absolument convergente est convergente. Pas de réciproque.

Dans ce cas, on a : $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration :

- Cas d'une série réelle.

On peut poser : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = |u_n| - (|u_n| - u_n)$, et on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq (|u_n| - u_n) \leq |u_n|$.

Donc la série $\sum (|u_n| - u_n)$ est convergente et comme différence de séries convergentes, $\sum u_n$ aussi.

De plus : $\forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=0}^N |u_n|$, et en passant à la limite, on a bien : $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

- Cas d'une série complexe.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n + i.b_n$, avec : $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$.

On constate alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |u_n|$, et : $|b_n| \leq |u_n|$.

Donc les séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, donc convergentes (ce qu'on vient juste de démontrer), et finalement $\sum u_n$ converge aussi.

En utilisant à nouveau l'inégalité triangulaire, on termine avec : $\forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=0}^N |u_n|$, et en passant

à la limite, on a toujours : $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Théorème 3.2 : règle des équivalents

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles dont les termes de l'une gardent un signe constant à partir d'un certain rang et telles que : $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

Alors : $(\sum u_n \text{ converge}) \Leftrightarrow (\sum v_n \text{ converge})$.

Démonstration :

On sait donc que (u_n) et (v_n) ont des termes de même signe à partir d'un certain rang, et donc quitte à les changer en leur opposée, on peut supposer qu'elles restent positives à partir d'un certain rang.

On peut encore écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n \cdot (1 + \varepsilon(n))$, avec : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Donc, pour : $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |\varepsilon(n)| \leq \frac{1}{2}$, et : $\frac{1}{2} \leq (1 + \varepsilon(n)) \leq \frac{3}{2}$, puis : $\frac{1}{2} \cdot u_n \leq v_n \leq \frac{3}{2} \cdot u_n$.

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit donc l'équivalence de convergence des deux séries.

Théorème 3.3 : séries de Riemann

Soit : $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, avec converge, si et seulement si : $\alpha > 1$.

Démonstration :

Soit : $u_{n,\beta} = \frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}$, avec β réel.

La série $\sum u_{n,\beta}$ est télescopique de somme partielle : $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n,\beta} = 1 - \frac{1}{(n+1)^\beta}$, et elle converge si et seulement si : $\beta \geq 0$.

De plus : $u_{n,\beta} = \frac{1}{n^\beta} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} \right] \sim_{+\infty} \frac{\beta}{n^{\beta+1}}$, pour : $\beta \neq 0$.

Soit maintenant : $\alpha \neq 1$. Alors : $\frac{1}{n^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{\alpha-1} \cdot u_{n,\beta}$, où on pose : $\beta = \alpha - 1 \neq 0$.

Comme les séries considérées gardent un signe constant, on en déduit que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\sum u_{n,\beta}$ converge, soit : $\beta > 0$, ou encore : $\alpha > 1$.

Enfin, pour : $\alpha = 1$, on a, pour les sommes partielles : $\forall N \geq 1, S_{2N} - S_N = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$.

Donc la suite (S_N) ne peut converger puisque $(S_{2N} - S_N)$ ne tend pas vers 0, et (S_N) tend vers $+\infty$.

Théorème 3.4 : règle des « grands O », des « petits o »

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries complexes telles $\sum v_n$ soit absolument convergente.

Si : $u_n = O(v_n)$ en $+\infty$, alors $\sum u_n$ est aussi absolument convergente.

Si de même : $u_n = o(v_n)$ en $+\infty$, alors $\sum u_n$ est aussi absolument convergente.

Démonstration :

• Dans le premier cas, on sait que : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M \cdot |v_n|$.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, si $\sum |v_n|$ converge, $\sum |u_n|$ converge aussi.

- Dans le second cas, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n \cdot \varepsilon_n$, où ε_n est une suite qui tend vers 0 en $+\infty$.
Donc : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |\varepsilon_n| \leq 1$, et : $|u_n| \leq |v_n|$, ce qui nous ramène au premier cas.

Théorème 3.5 : règle des « n^α »

Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe.

Si $(n^\alpha \cdot u_n)$ tend vers 0, avec : $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que les hypothèses se réécrivent en : $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, en $+\infty$ et que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

Théorème 3.6 : règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe non nulle à partir d'un certain rang, telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k$.

- Si :
- $k < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument,
 - $k > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement, (même si : $k = +\infty$)
 - $k = 1$, on ne peut a priori rien dire.

Démonstration :

- Cas : $0 \leq k < 1$.

Soit : $k < k' < 1$, et posons : $\varepsilon = k' - k > 0$.

Alors : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - k \right| \leq \varepsilon$, et : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \varepsilon + k = k'$, donc : $|u_{n+1}| \leq k' |u_n|$.

Dans ce cas : $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq (k')^{n-n_0} |u_{n_0}| = C \cdot (k')^n$, et la série étant majorée à partir d'un certain rang, par une série géométrique convergente est absolument convergente.

- Cas : $1 < k$ (éventuellement infini).

Comme précédemment, soit : $1 < k' < k$.

Alors, en adaptant la démonstration précédente : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \geq (k')^{n-n_0} |u_{n_0}|$, et le terme général de la série tend alors vers $+\infty$ donc la série diverge grossièrement.

Théorème 3.7 : exponentielle complexe

Soit : $z \in \mathbb{C}$.

La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

On note alors : $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, et cette fonction coïncide avec l'exponentielle réelle sur \mathbb{R} .

Démonstration :

Pour z nul, la série est évidemment convergente.

Pour : $z \in \mathbb{C}^*$, la série est absolument convergente en utilisant la règle de d'Alembert.

Soit maintenant x un réel, non nul (car dans le cas où : $x = 0$, l'égalité : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est immédiate).

Alors la formule de Taylor sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$ si : $x < 0$) garantit que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists c_{x,N} \in]0, x[\text{ (ou }]x, 0[), e^x = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \cdot e^{c_{x,N}}.$$

Or comme $c_{x,N}$ reste dans l'intervalle $]0, x[$ (ou $]x, 0[$), la quantité $e^{c_{x,N}}$ est majorée par un réel M indépendant de n (par exemple : $M = \max(1, e^x)$).

Donc : $\forall N \in \mathbb{N}, \left| e^x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot M$, et : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = e^x$, du fait des croissances comparées de $|x|^{N+1}$ et de $(N+1)!$, soit bien le résultat voulu.

4. Séries réelles alternées.

Définition 4.1 : série alternée

On dit que la série de réels $\sum u_n$ est alternée si et seulement si $((-1)^n \cdot u_n)$ garde un signe constant.

De manière équivalente si et seulement si le signe de u_n change à chaque n .

Théorème 4.1 : critère spécial des séries alternées

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que :

- $(|u_n|)$ est une suite décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Alors $\sum u_n$ converge et sa somme est du signe u_0 .

De plus : $\forall N \in \mathbb{N}, |R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \right| \leq |u_{N+1}|$.

Démonstration :

Quitte à remplacer toute la suite (u_n) par $(-u_n)$, on peut supposer : $u_0 \geq 0$.

Dans ce cas tous les termes u_{2n} sont positifs et u_{2n+1} négatifs.

Appelons (S_N) la suite des sommes partielles associée à la série $\sum u_n$.

Les suites $(S_{2,N})$ et $(S_{2,N+1})$ sont adjacentes.

En effet : $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$S_{2,(N+1)} - S_{2,N} = u_{2,N+2} + u_{2,N+1} = |u_{2,N+2}| - |u_{2,N+1}| \leq 0, \text{ et :}$$

$$S_{2,(N+1)+1} - S_{2,N+1} = u_{2,N+3} + u_{2,N+2} = |u_{2,N+2}| - |u_{2,N+3}| \geq 0,$$

Puis : $\forall N \in \mathbb{N}, S_{2,N+1} - S_{2,N} = u_{2,N+1}$, suite qui tend bien vers 0, car extraite d'une suite qui tend vers 0.

Donc $(S_{2,N})$ et $(S_{2,N+1})$ convergent vers la même limite L , et finalement (S_N) aussi.

De plus : $\forall N \in \mathbb{N}, 0 \leq S_1 \leq S_{2,N+1} \leq L \leq S_{2,N+2} \leq S_{2n,N} \leq S_0$.

Donc dans ce cas L est positif, soit du signe de u_0 , et aurait été négatif si on avait supposé u_0 négatif.

Enfin : $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$|R_{2,N+1}| = L - S_{2,N+1} \leq S_{2,N+2} - S_{2,N+1} = u_{2,N+2} = |u_{2,N+2}|, \text{ et :}$$

$$|R_{2,N}| = S_{2,N} - L \leq S_{2,N} - S_{2,N+1} = -u_{2,N+1} = |u_{2,N+1}|.$$

5. Compléments.

Théorème 5.1 : (hors programme) séries de Bertrand

Soit : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha \cdot (\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$, ou : $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

Démonstration :

- Cas : $\alpha > 1$.

Soit : $1 < \alpha' < \alpha$.

Alors : $\frac{1}{n^\alpha \cdot (\ln(n))^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha'}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-\alpha'} \cdot (\ln(n))^\beta}$, et $n^{\alpha-\alpha'} \cdot (\ln(n))^\beta$ tend vers $+\infty$, car : $\alpha - \alpha' > 0$.

Donc : $\frac{1}{n^\alpha \cdot (\ln(n))^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right)$, en $+\infty$, ce qui garantit la convergence de la série de Bertrand dans ce

cas.

- Cas : $\alpha = 1, \beta > 1$.

La série est à termes positifs donc elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Or : $\forall n \geq 3, \forall t \in [n-1, n], \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^\beta} \leq \frac{1}{t \cdot (\ln(t))^\beta}$, et : $\frac{1}{n \cdot (\ln(n))^\beta} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t \cdot (\ln(t))^\beta}$.

Puis : $\forall N \geq 3, \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^\beta} \leq \int_2^N \frac{dt}{t \cdot (\ln(t))^\beta} = \left[-\frac{1}{\beta-1} \cdot \frac{1}{(\ln(t))^{\beta-1}} \right]_2^N \leq \frac{1}{\beta-1} \cdot \frac{1}{(\ln(2))^{\beta-1}}$.

La suite des sommes partielles étant majorée, la série de Bertrand est donc convergente.

• Cas : $\alpha = 1, \beta = 1$.

De la même façon : $\forall n \geq 2, \forall t \in [n, n+1], \frac{1}{t \cdot (\ln(t))} \leq \frac{1}{n \cdot (\ln(n))}$, et : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t \cdot (\ln(t))} \leq \frac{1}{n \cdot (\ln(n))}$.

Puis : $\forall N \geq 2, \int_2^{N+1} \frac{dt}{t \cdot (\ln(t))} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \cdot (\ln(n))}$, et la suite des sommes partielles

tend vers $+\infty$ donc la série de Bertrand diverge.

• Cas : $\alpha = 1, \beta < 1$.

On minore alors en écrivant : $\forall n \geq 2, \frac{1}{n \cdot (\ln(n))} \leq \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^\beta}$, et le terme général de la série est minoré par le terme général d'une série positive divergente, donc la série de Bertrand diverge.

• Cas : $\alpha < 1$.

Puisque : $\forall n \geq 2, \frac{1}{n^\alpha \cdot (\ln(n))^\beta} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln(n))^\beta}$, et que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln(n))^\beta} = +\infty$, le terme général est là encore

minoré à partir d'un certain rang par le terme général $\frac{1}{n}$ d'une série positive divergente, et la série de Bertrand diverge.

Définition 5.1 : produit de Cauchy de deux séries

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes.

On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum w_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k \cdot v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p \cdot v_q.$$

Théorème 5.2 : convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Le produit de Cauchy de deux séries réelles ou complexes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est

une série $\sum w_n$ absolument convergente et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

Démonstration :

• Pour : $N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N |w_n| = \sum_{n=0}^N \left| \sum_{p+q=n} u_p \cdot v_q \right| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{p+q=n} |u_p| \cdot |v_q|$.

La dernière somme porte en fait sur tous les couples : $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, avec : $p + q \leq N$.

Or l'ensemble de ces couples est inclus dans $\{(p, q) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq N, 0 \leq q \leq N\}$.

Comme de plus les termes que l'on ajoute en remplaçant le premier ensemble d'indices par le second sont tous positifs, on a donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N |w_n| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{p+q=n} |u_p| \cdot |v_q| \leq \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N |u_p| \cdot |v_q| = \left(\sum_{p=0}^N |u_p| \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^N |v_q| \right) \leq \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_p| \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |v_q| \right).$$

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |w_n|$ étant majorée, la série $\sum |w_n|$ converge et $\sum w_n$ est absolument convergente.

• Puis : $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{2N} w_n = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{p+q=n} u_p \cdot v_q$, et l'ensemble des couples concernés par cette dernière somme

contient : $E'_N = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq N, 0 \leq q \leq N\}$, donc est la réunion de E'_N et d'un ensemble E_N .

$$\text{Donc : } \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{2N} w_n = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N u_p \cdot v_q + \sum_{(p,q) \in E_N'} u_p \cdot v_q = \left(\sum_{p=0}^N u_p \right) \left(\sum_{q=0}^N v_q \right) + \sum_{(p,q) \in E_N'} u_p \cdot v_q.$$

Enfin : $\forall (p,q) \in E_N', p \geq N+1, \text{ et } : q \geq N+1.$

$$\text{Donc : } \left| \sum_{(p,q) \in E_N'} u_p \cdot v_q \right| \leq \sum_{(p,q) \in E_N'} |u_p| \cdot |v_q| \leq \sum_{p=N+1}^{+\infty} \sum_{q=N+1}^{+\infty} |u_p| \cdot |v_q| = \left(\sum_{p=N+1}^{+\infty} |u_p| \right) \left(\sum_{q=N+1}^{+\infty} |v_q| \right),$$

ces majorations étant justifiées par le fait que les séries majorantes sont toutes convergentes.

Or le produit qui apparaît à la fin est le produit de deux restes d'ordre n de séries convergentes, et donc ce produit tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et la valeur absolue de la somme majorée aussi.

$$\text{Finalement : } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{2N} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{(p,q) \in E_N'} u_p \cdot v_q, \text{ d'où : } \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right).$$

Théorème 5.3 : constante d'Euler

La somme partielle H_N de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ admet un développement asymptotique en $+\infty$ qui

s'écrit : $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + o(1)$, en $+\infty$, où γ vaut environ : $\gamma \approx 0.577$, et est appelée constante d'Euler.

Démonstration :

On pose : $\forall N \geq 1, u_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N)$, et : $v_N = u_{N+1} - u_N$.

Alors la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est télescopique.

$$\text{De plus : } v_N = \frac{1}{N+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \cdot \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{-1} - \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) = -\frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

La série $\sum_{N \geq 1} v_N$ est alors absolument convergente et par conséquent la suite (u_N) converge.

Si on note cette limite γ , on peut alors écrire : $u_N = \gamma + \varepsilon(N)$, où ε est une suite qui tend vers 0 en $+\infty$. On en déduit bien le développement asymptotique de H_N annoncé.

Théorème 5.4 : formule de Stirling

En $+\infty$, on a : $n! \sim_{+\infty} n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$.

Démonstration :

Soit, pour : $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n! \cdot e^n}{n^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, et : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

La série $\sum v_n$ est télescopique et converge si et seulement la suite $(\ln(u_n))$ converge.

$$\text{Or : } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n \cdot \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(e) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

On utilise alors un développement limité en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2 en $+\infty$, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum v_n$ est donc à termes négatifs à partir d'un certain rang et son terme général est équivalent en $+\infty$ à celui d'une série de Riemann convergente (on peut aussi la voir comme la somme de deux séries convergentes ou absolument convergentes).

Donc $\sum v_n$ converge vers une limite L.

Par conséquent, $(\ln(u_n))$ converge vers $[L + \ln(u_1)]$, et (u_n) converge vers un réel strictement positif K égal à l'exponentielle de la limite précédente, du fait de la continuité de l'exponentielle sur \mathbb{R} .

On en déduit que : $u_n \sim_{+\infty} K$, puis : $n! \sim_{+\infty} n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n} \cdot K$.

La valeur de K enfin, peut être obtenue en passant par les intégrales de Wallis.

On peut poser pour cela : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t).dt$.

On montre que : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{n}}$, puis que : $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!^2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

On en déduit finalement : $K = \sqrt{2 \cdot \pi}$.