Séries Numériques (corrigé niveau 2).

Séries télescopiques.

27. Pour $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série réelle positive, on pose : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{(1+u_0).(1+u_1)...(1+u_n)}$.

a. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ peut se mettre sous la forme d'une série télescopique.

b. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente.

c. Dans le cas où la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, préciser la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

a. On peut écrire :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1+u_n-1}{(1+u_0).(1+u_1)...(1+u_n)} = \frac{1}{(1+u_0).(1+u_1)...(1+u_{n-1})} - \frac{1}{(1+u_0).(1+u_1)...(1+u_n)},$$

avec le cas particulier : $v_0 = \dfrac{1+u_0-1}{(1+u_0)} = 1 - \dfrac{1}{1+u_0}$.

On peut ainsi poser : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{(1+u_0).(1+u_1)...(1+u_{n-1})}$, et : $a_0 = 1$,

ce qui donne bien : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = a_n - a_{n+1}$.

b. La convergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est équivalente à celle de la suite (a_n).

Or cette suite est positive et décroissante puisque (u_n) est à termes positifs, donc convergente.

La série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est donc convergente.

c. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ puisque $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs.

On a également : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ (1+u_0).(1+u_1)...(1+u_n) \geq u_0 + ... + u_n$,

car en développant le produit on voit apparaître la quantité minorante et d'autres termes positifs.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+u_0).(1+u_1)...(1+u_n) = +\infty$, et (a_n) tend vers 0.

Donc : $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0 - \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_0 = 1$.

28. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série réelle à termes strictement positifs et soit (u_n) la suite définie par :

- $u_0 > 0$, et :
- $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}.(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2})$.

a. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, la suite (u_n) converge également.

b. Montrer que si on pose :

- $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = 1$, et :
- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$,

on peut construire une suite (a_n) telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}.(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2})$, et la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est à termes strictement positifs et divergente.

Qu'en déduit-on ?

Notons tout d'abord que la suite (u_n) est toujours correctement définie et à termes positifs.

a. On constate que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \le \frac{1}{2}.(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2 + 2.u_n.a_n}) \le \frac{1}{2}.(u_n + u_n + a_n) = u_n + \frac{1}{2}.a_n \text{, et :}$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \ge \frac{1}{2}.(u_n + \sqrt{u_n^2}) = \frac{1}{2}.(u_n + u_n) = u_n,$$

d'où en résumé : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_{n+1} - u_n \le \frac{1}{2}.a_n$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série télescopique $\sum_{n\ge 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge donc la suite (u_n) aussi.

b. La suite (u_n) proposée est strictement croissante, à premier terme strictement positif et convergente (suite des sommes partielles d'une série de Riemann convergente) de somme : $L = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} > 0$.

Par ailleurs, on voudrait une suite (a_n) telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}.(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2})$.

Il suffit pour cela que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ (2.u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2 = a_n^2 = 4.u_{n+1}^2 - 4.u_{n+1}.u_n = 4.u_{n+1}.(u_{n+1} - u_n)$,

et donc on va poser : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n = 2.\sqrt{u_{n+1}.(u_{n+1} - u_n)}$.

La suite (a_n) est ainsi bien définie car la suite (u_n) est croissante et à termes positifs et on a bien :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}.(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}).$$

Mais par ailleurs : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 2.\sqrt{u_{n+1}.(u_{n+1} - u_n)} \underset{+\infty}{\sim} 2.\sqrt{L.(u_{n+1} - u_n)} = \frac{2.\sqrt{L}}{n}$,

et la série $\sum_{n\ge 0} a_n$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

La réciproque de l'implication de la question a n'est donc pas vraie.

29. Soit (u_n) une suite réelle définie par :

- $u_0 \in\ ]0,1[$, et :
- $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}.(u_n + u_n^2)$.

a. Etudier la convergence de la suite (u_n).

b. Etudier la nature de la série $\sum_{n\ge 0} u_n$.

a. Il est immédiat que la suite (u_n) est bien définie et par récurrence : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \in\ ]0,1[$.

En effet, ce résultat est vrai pour u_0 et s'il est vrai pour un entier : $n \ge 0$, alors :

$u_n^2 \in\ ]0,1[$, et donc : $u_{n+1} = \frac{1}{2}.(u_n + u_n^2) \in\ ]0,1[$.

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}.(u_n^2 - u_n) = \frac{1}{2}.u_n.(u_n - 1) < 0$,

et la suite est strictement décroissante.

Etant de plus minorée par 0, elle converge vers une limite L.

Enfin, L vérifie : $L = \frac{1}{2}.(L + L^2)$, soit : $L = L^2$, et L vaut 0 ou 1.

Mais (u_n) étant à termes dans]0,1[et strictement décroissante, on en déduit que : $L = 0$.

b. Puisque (u_n) tend vers 0, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}.u_n.(u_n - 1) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{2}$.

Or la série télescopique $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge car la suite (u_n) converge.

Par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum_{n\geq 0} -\frac{u_n}{2}$ converge et donc aussi la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

30. Soit (u_n) la suite définie par :

- $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et :
- $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

b. En utilisant $(u_{n+1}-u_n)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^3$ converge.

c. En utilisant $(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n))$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ diverge.

a. Puisque la fonction f définie par : $\forall\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \sin(x) - x$, a une dérivée strictement négative, elle est donc strictement décroissante et nulle en 0, elle reste strictement négative sur l'intervalle.
Donc la suite (u_n) est décroissante et étant minorée par 0, elle converge.
Enfin sa limite L est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et comme elle ne peut pas être dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle est nulle et (u_n) converge vers 0.

b. La série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1}-u_n)$ est télescopique et converge car la suite (u_n) converge.

De plus : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n = \sin(u_n) - u_n = -\frac{u_n^3}{6} + o_{+\infty}(u_n^3) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6}$.

Donc par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum_{n\geq 0} -\frac{u_n^3}{6}$ converge et la série $\sum_{n\geq 0} u_n^3$ aussi.

c. La série télescopique $\sum_{n\geq 0}(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n))$ est tout d'abord bien définie (puisque (u_n) est à termes dans $]0,1[$) et divergente car la suite (u_n) tend vers 0 donc $(\ln(u_n))$ tend vers -∞.
De plus :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ (\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right) = \ln\left(1-\frac{u_n^2}{6}+o_{+\infty}(u_n^2)\right) = -\frac{u_n^2}{6} + o_{+\infty}(u_n^2) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{6}.$$

Donc par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum_{n\geq 0} -\frac{u_n^2}{6}$ diverge et la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ aussi.

31. Soit (u_n) une suite croissante strictement positive qui tend vers +∞.

On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$.

En utilisant la suite (w_n) où : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ w_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{dt}{t}$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

On constate immédiatement que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n}\int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{dt}{t} = \int_{u_0}^{u_{n+1}} \frac{dt}{t} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$.

Donc la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ diverge (vers +∞).

Par ailleurs : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ w_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{dt}{t} \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{dt}{u_n} = \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n} = v_n$.

Donc par minoration de série à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Séries à termes positifs ou de signe constant.

32. Etudier la convergence des séries suivantes :

a. $\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, b. $\sum\left[(n^a+1)^{\frac{1}{a}}-(n^b+1)^{\frac{1}{b}}\right]$, $(a,b)\in \mathbb{R}^{+*2}$, c. $\sum\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$.

a. Pour la première série, on peut écrire :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}=\exp\left(-n^2.\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)=\exp\left(-n^2.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\exp\left(-n^2.\left(\frac{1}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=\exp(-n+o_{+\infty}(n)).$$

Donc : $n^2.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}=\exp(-n+o_{+\infty}(n)+2.\ln(n))=\exp(-n+o_{+\infty}(n))$,

qui tend vers 0 en +∞.

Donc la série $\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

b. Pour la deuxième, on écrit :

$$(n^a+1)^{\frac{1}{a}}=n.\left(1+\frac{1}{n^a}\right)^{\frac{1}{a}}=n.\left(1+\frac{1}{a}.\frac{1}{n^a}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^a}\right)\right)=n+\frac{1}{a}.\frac{1}{n^{a-1}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right).$$

On distingue alors plusieurs cas :

- si : $a=b$, la série est la série nulle et converge,
- si : $a>b$, on a : $u_n=(n^a+1)^{\frac{1}{a}}-(n^b+1)^{\frac{1}{b}}=\frac{1}{a}.\frac{1}{n^{a-1}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)-\frac{1}{b}.\frac{1}{n^{b-1}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{b-1}}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{b}.\frac{1}{n^{b-1}}$.

  Par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge si et seulement si : $b-1>1$, soit : $b>2$.
- si : $a<b$, on a de même : $u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{a}.\frac{1}{n^{a-1}}$, et la série $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge si et seulement si : $a>2$.

Conclusion : la série converge si et seulement si : ($a=b$) ou ($a>2$, et : $b>2$).

c. Pour la troisième, on réécrit le terme général :

$$\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}=\exp(-\ln(n).\ln(\ln(n)))=\frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}.$$

Et puisque ($\ln(\ln(n))$) tend vers +∞, il existe un rang n_0 à partir duquel : $\ln(\ln(n))\geq 2$, soit :

$$\forall\ n\geq n_0,\ 0\leq\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}=\frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}\leq\frac{1}{n^2},$$

et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ converge.

33. Pour : $x\in\mathbb{R}$, et : $N\in\mathbb{N}$, on note : $S_N=\sum_{n=1}^{N}n.x^n$.

a. Trouver une condition nécessaire pour que (S_N) converge.

b. A l'aide de $(1-x).S_N$, calculer S_N.

c. En déduire que (S_N) converge et préciser sa limite.

a. S_N étant une somme partielle de série, pour que la suite (S_N) converge, il est nécessaire que son terme général tende vers 0.

Or :

- ($|x|>1$) $\Rightarrow$ ($n.|x|^n$ tend vers +∞),

- ($|x| = 1$) $\Rightarrow$ ($n.|x|^n$ tend vers $+\infty$).

Donc on doit prendre : $|x| < 1$.

b. A partir de là, et pour : $|x| < 1$, on a : $(1-x).S_N = \sum_{n=1}^{N} n.x^n - \sum_{n=1}^{N} n.x^{n+1} = \sum_{n=1}^{N} n.x^n - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1).x^n$.

En regroupant ce qu'on peut regrouper : $(1-x).S_N = \sum_{n=1}^{N} n.x^n - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1).x^n = x + \sum_{n=2}^{N} x^n - N.x^{N+1}$.

Si on fait tendre N vers $+\infty$, on conclut que ($(1-x).S_N$) converge et : $(1-x).S = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} x^n = \dfrac{x}{1-x}$.

Finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty} n.x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

---

34. Soit (a_n) une suite positive, et (u_n) la suite définie par :
   - $u_0 > 0$,
   - $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie, et croissante.

   b. Montrer que si (u_n) converge, sa limite est strictement positive puis que la série $\sum a_n$ converge.

   c. Réciproquement, montrer que si $\sum a_n$ converge, la suite (u_n) est convergente.

---

a. On montre de façon immédiate par récurrence que :
$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et est strictement positif.

Dans ce cas : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n} \geq 0$, et (u_n) est bien croissante.

b. Supposons que (u_n) converge.

Alors puisque la suite est strictement croissante, sa limite L est supérieure à u_0, donc : $L > 0$.

Mais alors : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{L}$.

Les deux séries $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum \dfrac{a_n}{L}$ étant à termes positifs, elles ont alors même comportement.

Or la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge puisque la suite (u_n) converge, donc la série $\sum \dfrac{a_n}{L}$ puis la série $\sum a_n$ convergent aussi.

c. Réciproquement, si $\sum \mathrm{a}_n$ converge, on commence par dire que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n$ (puisque (u_n) est croissante), et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n} \leq \dfrac{a_n}{u_0}$.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge et la suite (u_n) est convergente.

---

35. Soient $\sum u_n$ et $\sum \alpha_n$ des séries à termes strictement positifs, telles que :

   $\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$.

   a. Montrer que : $u_n = O_{+\infty}(\alpha_n)$.

   b. Que peut-on en déduire entre la convergence de $\sum u_n$ et celle de $\sum \alpha_n$?

---

a. On peut réécrire l'hypothèse en : $\forall\ n \geq n_0,\ 0 \leq \dfrac{u_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{\alpha_n} \leq C = \dfrac{u_{n_0}}{\alpha_{n_0}}$.

Donc on a bien : $u_n = O_{+\infty}(\alpha_n)$, (soit $\left(\dfrac{u_n}{\alpha_n}\right)$ bornée).

b. D'où : ($\sum \alpha_n$ converge) $\Rightarrow$ ($\sum u_n$ converge), par comparaison de séries à termes positifs.

36. Pour : $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{P(n)}$.

a. Montrer que pour que (u_n) tende vers 0, il faut que P soit de degré 2.
Montrer de plus que le coefficient dominant de P ne peut être que 1 puis qu'alors, (u_n) est bien définie au moins à partir d'un certain rang.

b. Déterminer P pour que la série de terme général u_n converge.

a. Notons tout d'abord que suivant P, la suite (u_n) présente un problème de définition.
Il est nécessaire que le coefficient dominant de P soit positif car sinon, P deviendrait négatif à partir d'un certain rang.
Dans le cas donc où le coefficient dominant de P (notons-le a) est positif, on peut alors écrire :
$\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(n) = a.n^k + \ldots \underset{+\infty}{\sim} a.n^k$, où k désigne le degré de P.

Cet équivalent garantit que $P(n)$ devient positif pour n assez grand et que u_n est défini à partir de ce rang.

Puis : $\sqrt{P(n)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{a}.n^{\frac{k}{2}}$, et d'autre part : $\sqrt{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} n$.
Distinguons alors plusieurs cas :

- $k < 2$, alors $\sqrt{P(n)}$ est négligeable en $+\infty$ devant $\sqrt{n^2+1}$ et (u_n) tend vers $+\infty$:
  la série $\sum u_n$ diverge.
- $k > 2$, alors $\sqrt{n^2+1}$ devient négligeable devant $\sqrt{P(n)}$, et (u_n) tend vers $-\infty$:
  la série diverge encore.
- $k = 2$, et : $a \neq 1$, on a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} (1-\sqrt{a}).n$, u_n à nouveau ne tend pas vers 0, et $\sum u_n$ diverge.

Finalement pour que la série converge, il faut que : $k = 2$, $a = 1$, soit : $P = X^2 + b.X + c$.

b. On peut sous la dernière hypothèse écrire :

$$\sqrt{P(n)} = \sqrt{n^2 + b.n + c} = n.\left(1 + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n.\left(1 + \frac{b}{2}.\frac{1}{n} + \left(\frac{c}{2} - \frac{b^2}{8}\right).\frac{1}{n^2} + \left(-\frac{b.c}{4} + \frac{b^3}{16}\right).\frac{1}{n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right),$$

et : $\sqrt{n^2+1} = n.\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n.\left(1 + \dfrac{1}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)\right)$.

D'où : $u_n = \left(-\dfrac{b}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{c}{2} + \dfrac{b^2}{8}\right).\dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{b.c}{4} - \dfrac{b^3}{16}\right).\dfrac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On doit donc prendre : $b = 0$, pour que u_n tende vers 0.

Si : $c \neq 1$, alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{c}{2}\right).\dfrac{1}{n}$, et la série $\sum u_n$ a son terme général équivalent à celui d'une série de signe constant et divergente, et à ce titre diverge.

Donc on doit prendre : $c = 1$, et dans ce cas : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$, et la série $\sum u_n$ converge.

Conclusion : la série converge si et seulement si : $P = X^2 + 1$, et la série est alors la série nulle.

Remarque : le développement limité (si u_n n'avait pas été constamment nul) nous aurait permis dans tous les cas de déterminer la nature de $\sum u_n$ qui aurait été alors convergente, grâce à un équivalent.

Séries de signe quelconque, somme de séries convergentes.

37. Pour : $x \in \mathbb{R}^{+*}$, et : $n \geq 1$, on pose : $u_n = \dfrac{n!}{x^n}.\prod_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{x}{k}\right)$.

a. Etudier la série de terme général $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ et en déduire que (u_n) converge en précisant sa limite.

b. Montrer que : $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq1}\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ converge (on précisera la valeur de α).

c. Pour cette valeur, montrer que : $\exists\ A \in \mathbb{R}$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} A.n^{\alpha}$.

d. Etudier la convergence la série $\sum_{n\geq1} u_n$.

a. Tout d'abord : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{x}.\ln\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right) = \dfrac{n+1}{x}.\left(\dfrac{x}{n+1} - \dfrac{x^2}{2.(n+1)^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \dfrac{x}{2.(n+1)} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$,

ce qui donne encore : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{x}{2.n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Puis : $\forall\ n \geq 1$, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{x}{2.n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = -\dfrac{x}{2.n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{2.n}$.

Par équivalence avec une série de signe constant ($x > 0$), la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge vers $-\infty$ et la suite ($\ln(u_n)$) aussi.

Donc (u_n) tend vers 0.

b. Pour α donné, on a : $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{x}{2.n} - \dfrac{\alpha}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Par comparaison de séries à termes de signe constant, pour que la série converge, il faut que :

$\alpha + \dfrac{x}{2} = 0$, soit : $\alpha = -\dfrac{x}{2}$.

Pour cette valeur de α, le terme général s'écrit : $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \alpha.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{A}{n^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

où A est une constante et ce terme est la somme des termes de deux séries absolument convergentes.
On en déduit que cette valeur de α conduit bien à une série convergente.

Remarque : c'est un cas où la notation $O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (« grand O ») est pratique.

c. La série précédente a pour terme général celui d'une série télescopique car :

$\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \alpha.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = [\ln(u_{n+1}) - \alpha.\ln(n+1)] - [\ln(u_n) - \alpha.\ln(n)]$.

Puisque cette série converge, on en déduit que la suite $(\ln(u_n) - \alpha.\ln(n))$ converge vers une limite notée L, et $(u_n.n^{-\alpha})$ converge vers : $A = e^L$, soit : $u_n.n^{-\alpha} \underset{+\infty}{\sim} A$, ou encore : $u_n \underset{+\infty}{\sim} A.n^{\alpha}$.

d. Par comparaison de séries à termes positifs et puisque : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^{\frac{x}{2}}}$, on en déduit que :

- si : $\dfrac{x}{2} \leq 1$, ou encore : $0 < x \leq 2$, la série $\sum_{n\geq1} u_n$ diverge,
- si : $\dfrac{x}{2} > 1$, ou encore : $x > 2$, la série $\sum_{n\geq1} u_n$ converge.

38. En transformant $\sin(2.\alpha)$, étudier la série $\sum \ln\left(\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right)$, pour : $|x| < \dfrac{\pi}{2}$, et donner sa somme.

Notons, pour : $n \in \mathbb{N}$: $P_n = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Alors : $\forall\ n \geq 1$, on a : $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).P_n = \frac{1}{2}.\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right).P_{n-1}$, et par récurrence : $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).P_n = \frac{1}{2^n}.\sin(x).P_0$.

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(P_n) = \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) + \ln(\sin(x)) + \ln(P_0)$, pour : $x \neq 0$, et :

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = -\ln\left(2^n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) + \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)).$$

Or quand n tend vers $+\infty$, la suite $\left(\ln\left(2^n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)\right)$ tend vers $\ln(x)$ (avec un équivalent).

Donc la série converge et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) = -\ln(x) + \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)) = \ln\left(\frac{\sin(x).\cos(x)}{x}\right) = \ln\left(\frac{\sin(2.x)}{2.x}\right).$$

39. Montrer la convergence de la série $\sum \frac{2.n-1}{n.(n^2-1)}$, et à l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer sa somme.

Un équivalent du terme général donne la convergence de la série : $\frac{2.n-1}{n.(n^2-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série proposée converge.

Puis : $\frac{2.X-1}{X.(X-1).(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$, puis : $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$, d'où :

$$\forall\ n \geq 2,\ \sum_{k=2}^{n} \frac{2.k-1}{k.(k^2-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{3}{2}.\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}.\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{3}{2}.\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

On simplifie alors la partie commune aux trois sommes et :

$$\forall\ n \geq 2,\ \sum_{k=2}^{n} \frac{2.k-1}{k.(k^2-1)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{3}{2}.\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}.\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}.\frac{1}{n} - \frac{3}{2}.\frac{1}{n+1}.$$

En passant à la limite, on en déduit la somme de la série qui vaut $\frac{5}{4}$.

40. Soit $\sum z_n$ une série complexe convergente, et : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$.

a. Montrer que : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n.(n+1)} + \frac{S_N}{N+1}$.

b. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z_n}{n}$ converge.

a. On peut par exemple raisonner par récurrence sur N :

- pour : $N = 1$, on a : $\sum_{n=1}^{N} \frac{z_n}{n} = z_1$, et : $\sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n.(n+1)} + \frac{S_N}{N+1} = \frac{S_1}{1.2} + \frac{S_1}{2} = S_1 = z_1$, d'où l'égalité.
- si on suppose l'égalité vraie pour un : $N \in \mathbb{N}^*$, donné, alors :

$$\sum_{n=1}^{N+1} \frac{S_n}{n.(n+1)} + \frac{S_{N+1}}{N+2} = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{z_n}{n} - \frac{S_N}{N+1}\right) + \frac{S_{N+1}}{(N+1).(N+2)} + \frac{S_{N+1}}{N+2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{z_n}{n} + \frac{S_{N+1}}{N+1} - \frac{S_N}{N+1},$$

et comme : $\frac{S_{N+1}}{N+1} - \frac{S_N}{N+1} = \frac{z_{N+1}}{N+1}$,

on en déduit l'égalité voulue au rang $N+1$, ce qui termine la récurrence.

b. Puisque la série $\sum z_n$ converge, la suite (S_n) est convergente donc bornée.

Par conséquent, la suite $\left(\dfrac{S_N}{N+1}\right)$ converge vers 0.

De plus, si on note A un majorant de $|S_N|$, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{S_n}{n.(n+1)}\right| \leq \dfrac{A}{n^2}$,

et la série $\sum \dfrac{S_n}{n.(n+1)}$ est absolument convergente, donc convergente.

Finalement la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{z_n}{n}$ converge, et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{z_n}{n}$ converge.

41. On pose, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$, et : $T_n = S_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

a. Montrer que les deux suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes en précisant leur limite commune.

b. Montrer l'existence d'une suite d'entiers naturels (p_n) et d'une suite de réels (r_n), telles que :

- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n!.e = p_n + r_n$,
- (r_n) converge vers 0.

c. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $0 \leq e - S_{n+1} \leq \dfrac{1}{(n+1).(n+1)!}$, et en déduire un équivalent de r_n en $+\infty$.

d. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \sin(2.\pi.n!.e)$?

e. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \sin(\pi.n!.e)$?

a. Il est immédiat que la suite (S_n) est croissante (et convergente puisque la série converge).

De même, il est immédiat que la suite ($T_n - S_n$) tend vers 0.

Enfin : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} - T_n = S_{n+1} - S_n + \dfrac{1}{(n+1).(n+1)!} - \dfrac{1}{n.n!} = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1).(n+1)!} - \dfrac{1}{n.n!}$,

et donc : $T_{n+1} - T_n = \dfrac{n+2-(n+1)^2}{(n+1).(n+1)!} = \dfrac{-n^2-n+1}{(n+1).(n+1)!} \leq 0$, puisque : $n \geq 1$.

Donc les suites sont bien adjacentes (et on retrouve la convergence de la suite (S_n)).

Leur limite commune est évidemment e.

b. Puisque : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq e \leq T_n$, on a : $n!.S_n \leq n!.e < n!.T_n = n!.S_n + \dfrac{1}{n}$,

car (T_n) est strictement décroissante.

De plus, il est clair que : $n!.S_n = n!.\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$, comme somme d'entiers.

Si on pose alors : $p_n = n!.S_n$, et : $0 \leq r_n = n!.e - n!.S_n < \dfrac{1}{n}$, on a ainsi construit deux suites (p_n) et (r_n) que l'on peut au besoin compléter avec : $p_0 = 2$, et : $r_0 = e - 2$, répondant aux exigences à savoir que (p_n) est une suite d'entiers naturels et (r_n) tend bien vers 0 par le théorème des gendarmes.

c. On a immédiatement : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $0 \leq e - S_{n+1} \leq T_{n+1} - S_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1).(n+1)!}$.

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n!.e - n!.S_{n+1} \leq \dfrac{n!}{(n+1).(n+1)!}$, d'où : $0 \leq n!.e - n!.\left(S_n + \dfrac{1}{(n+1)!}\right) \leq \dfrac{n!}{(n+1).(n+1)!}$,

et : $0 \leq r_n - \dfrac{n!}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{(n+1)^2}$, puisque : $r_n = n!.e - n!.S_n$.

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le r_n - \dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{(n+1)^2}$, soit : $r_n = \dfrac{1}{n+1} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et : $r_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

d. On peut alors écrire : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sin(2.\pi.n!.e) = \sin(2.\pi.(p_n + r_n)) = \sin(2.\pi.r_n) \underset{+\infty}{\sim} 2.\pi.r_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2.\pi}{n}$,

et donc la série $\sum_{n\ge 0} \sin(2.\pi.n!.e)$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

e. La question c donne : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = \dfrac{1}{n+1} + x_n$, avec : $0 \le x_n \le \dfrac{1}{(n+1)^2}$, d'où : $x_n = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc on en déduit que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = \dfrac{1}{n} + x_n + O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n} + O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sin(\pi.n!.e) = \sin(\pi.(p_n + r_n)) = \sin(\pi.r_n).(-1)^{p_n}$.

Enfin : $\forall\ n \ge 2,\ p_n = n!.S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!} = 1 + n + \sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{n!}{k!} = (n+1) + n.(n-1).\sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{(n-2)!}{k!}$,

et comme $n.(n-1)$ est pair et $\sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{(n-2)!}{k!}$ est un entier, on conclut que : $(-1)^{p_n} = (-1)^{n+1}$.

Finalement : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sin(\pi.n!.e) = (-1)^{n+1}.\left(\dfrac{1}{n} + O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

et la série $\sum_{n\ge 0} \sin(\pi.n!.e)$ converge comme somme d'une série alternée convergente (d'après le critère spécial) et d'une série absolument convergente.

Produit infini.

42. Pour : $N \ge 2$, on pose : $P_N = \prod_{n=2}^{N} \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

a. Justifier que : $\forall\ N \ge 2,\ P_N > 0$, puis à l'aide du logarithme, montrer que (P_N) tend vers 0.

b. En utilisant un équivalent lié à la série harmonique, montrer que : $\exists\ C \in \mathbb{R}^*,\ P_N \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C}{\sqrt{N}}$.

a. Pour : $N \ge 2$, tous les termes du produit qui composent P_N sont strictement positifs et P_N l'est aussi.

De plus : $\forall\ N \ge 2,\ \ln\left(\prod_{n=2}^{N} \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Si on note u_n le terme qui apparaît dans la somme, alors : $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2.n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Or la série $\sum_{n\ge 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge du fait du critère spécial et la série $\sum_{n\ge 2} \left(-\dfrac{1}{2.n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ diverge vers $-\infty$ par comparaison de séries à termes négatifs.

Donc la suite ($\ln(P_N)$) diverge vers -∞ et (P_N) tend vers 0.

Remarque : l'écriture « intuitive » qu'on aurait pour ce résultat : $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = 0$,

montre qu'il faut être prudent car ce « produit » (ça n'en est pas un) est nul alors que tous ses termes sont non nuls.

b. Si on pousse le développement de u_n à un ordre de plus, on obtient :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2.n} + \frac{(-1)^n}{3.n.\sqrt{n}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n.\sqrt{n}}\right) = a_n + b_n + c_n.$$

Les séries $\sum a_n$ et $\sum c_n$ convergent (la deuxième par absolue convergence), et donc :

$\ln(P_N) = \sum_{n=2}^{N} a_n + \sum_{n=2}^{N} b_n + \sum_{n=2}^{N} c_n = L_a - \frac{1}{2}.\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 1\right) + L_c + o_{+\infty}(1) = -\frac{1}{2}.\ln(N) + K + o_{+\infty}(1)$, d'où :

$P_N = \frac{1}{\sqrt{N}}.e^{K+o_{+\infty}(1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^K}{\sqrt{N}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{N}}$, avec : $C = e^K \in \mathbb{R}^*$.

43. Pour (u_n) une suite à termes positifs, on pose : $\forall N \in \mathbb{N}$, $P_N = \prod_{n=0}^{N} (1+u_n)$.

Montrer l'équivalence : ((P_N) converge) $\Leftrightarrow$ ($\sum_{n\geq 0} u_n$ converge).

Remarquons tout d'abord que : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\ln(P_N) = \sum_{n=0}^{N} \ln(1+u_n)$, et raisonnons par double implication :

• si (P_N) converge et comme tous les termes du produit sont supérieurs à 1, la limite P de (P_N) est supérieure à 1.
La série $\sum \ln(1+u_n)$ converge alors vers $\ln(P)$ et son terme général tend vers 0.
Mais alors : $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$, et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

• si la série $\sum u_n$ converge, alors son terme général tend vers 0 et : $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$.
Donc la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge, et la suite $\ln(P_N)$ aussi, ce qui entraîne la convergence de (P_N).

Séries alternées et autour de la série alternée.

44. Etudier la convergence de la série $\sum (-1)^n.\sqrt[n]{n}.\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Attention à ne pas se contenter d'un équivalent.

On peut écrire : $(-1)^n.\sqrt[n]{n}.\sin\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n.\frac{\sqrt[n]{n}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}.\sqrt[n]{n}}{3.n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n^3}\right)$.

On écrit ainsi le terme général u_n comme la somme de deux termes, a_n et b_n.

La deuxième série converge par absolue convergence car : $|b_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}.\sqrt[n]{n}}{3.n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n^3}\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[n]{n}}{3.n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3.n^3}$.

En effet, la suite $(\sqrt[n]{n})$ tend vers 1.
La première est alternée.
Posons alors f la fonction : $x \mapsto x^{1-x} = \exp((1-x).\ln(x))$, et étudions-la sur]0,1].

Elle y est dérivable et : $\forall x \in$]0,1], $f'(x) = \left(-\ln(x) + \frac{1-x}{x}\right).f(x)$.

On pose alors : $g(x) = -\ln(x) + \frac{1}{x} - 1$, sur]0,1], et : $g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$.

g est donc décroissante sur]0,1] et s'annule en 1 : elle reste positive sur l'intervalle.
On en déduit que f' est positive et f est donc croissante sur]0,1].

La série $\sum a_n$, avec : $\forall n \geq 1$, $a_n = (-1)^n.\frac{\sqrt[n]{n}}{n} = (-1)^n.\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{n}} = (-1)^n.f\left(\frac{1}{n}\right)$,

vérifie donc le critère spécial des séries alternées et est donc convergente.

Finalement la série proposée $\sum (-1)^n.\sqrt[n]{n}.\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

45. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n.8^n}{(2.n)!}$ converge et que sa somme est un réel négatif.

La série proposée est alternée.

De plus : $\forall\ n \geq 0$, $\dfrac{8^{n+1}}{(2.n+2)!}.\dfrac{(2.n)!}{8^n} = \dfrac{8}{(2.n+1).(2.n+2)} = \dfrac{4}{(2.n+1).(n+1)}$,

et ce quotient est plus petit que 1 dès que : $n \geq 1$.

Donc la série vérifie les hypothèses du critère spécial à partir du rang 1.

On peut alors écrire : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n.8^n}{(2.n)!} = 1 - 4 + \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n.8^n}{(2.n)!} = -3 + S'$, avec : $S' = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n.8^n}{(2.n)!}$.

S' positif et : $|S'| \leq \left|\dfrac{8^2}{4!}\right| = \dfrac{64}{24} = \dfrac{8}{3} < 3$.

Donc : $S < 0$.

46. a. Justifier l'existence de : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$, pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k.(k+1)}$.

c. Déterminer un équivalent de R_n en $+\infty$.

d. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} R_n$.

a. Pour : $n \geq 1$, et comme reste d'une série convergente, R_n existe et est du signe de son premier terme à savoir $(-1)^{n+1}$ puisque la série définissant R_n vérifie le critère spécial des séries alternées.

b. On a immédiatement :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right),$$

en ayant effectué une translation d'indice et réappelé k le nouvel indice p.

D'où : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k.(k+1)}$.

c. On peut alors écrire : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ R_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}$, donc : $2.R_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} + R_n + R_{n+1}$.

Or la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n.(n+1)}$ est alternée et vérifie le critère spécial de façon immédiate.

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |R_n + R_{n+1}| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k.(k+1)} \right| \leq \dfrac{1}{(n+1).(n+2)}$, et : $R_n + R_{n+1} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc : $R_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2.(n+1)} + O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2.n} + O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2.n}$.

d. L'équivalent obtenu au-dessus ne permet pas d'en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} R_n$, mais comme somme d'une série convergente (alternée vérifiant le critère spécial) et d'une série absolument convergente, la série $\sum_{n\geq 1} R_n$ converge.

Autour de la série harmonique.

47. Pour : $n \geq 1$, on pose : $S_N = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k + \sqrt{k}}$.

a. Donner un équivalent simple de S_n en $+\infty$.

b. Montrer qu'il existe : $C \in \mathbb{R},\ S_n = \ln(n) + C + \varepsilon(n)$, où ($\varepsilon(n)$) tend vers 0 en $+\infty$.

a. On peut penser à comparer S_n à H_n.

Pour cela : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n - H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{k.(k+\sqrt{k})}$.

Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n.(n+\sqrt{n})}$ converge par comparaison de séries à termes positifs, donc la suite de ses sommes partielles est bornée.

Donc : $\frac{S_n}{\ln(n)} = \frac{H_n}{\ln(n)} + \frac{s_n}{n}$, avec $\left(\frac{H_n}{\ln(n)}\right)$ qui tend vers 1 et $\left(\frac{a_n}{\ln(n)}\right)$ qui tend vers 0.

Donc : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

b. On peut être plus précis puisque le fait que ($S_n - H_n$) converge s'écrit aussi :

$\exists\ K \in \mathbb{R},\ S_n - H_n = K + o_{+\infty}(1)$

et comme : $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{+\infty}(1)$, finalement :

$S_n = \ln(n) + (K+\gamma) + o_{+\infty}(1)$, soit bien : $S_n = \ln(n) + C + o_{+\infty}(1)$,

où C est une constante, et $o_{+\infty}(1)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Séries de Bertrand.

48. a. On note f la fonction définie sur $]1,+\infty)$ par : $\forall\ x > 1,\ f(x) = \ln(\ln(x))$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à f, montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n.\ln(n)}$ diverge.

b. Montrer que : $\forall\ \alpha < 1,\ \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha.\ln(n)}$ diverge.

c. Montrer que : $\forall\ \alpha \geq 2,\ \forall\ \beta \in \mathbb{R},\ \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha.(\ln(n))^\beta}$ converge.

a. La fonction f est définie et de classe C^1 sur $]1,+\infty)$, et : $\forall\ x > 1,\ f'(x) = \frac{1}{x}.\frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{x.\ln(x)}$.

Donc : $\forall\ n \geq 2,\ \exists\ c_n \in\ ]n, n+1[,\ f(n+1) - f(n) = f'(c_n)$,

autrement dit : $\forall\ n \geq 2,\ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) = \frac{1}{c_n.\ln(c_n)} \leq \frac{1}{n.\ln(n)}$.

Or la série télescopique $\sum_{n\geq 2} (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)))$ diverge puisque la suite ($\ln(\ln(n))$) diverge.

Donc par minoration, la série de termes positifs $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n.\ln(n)}$ diverge.

b. Il est immédiat que : $\forall\ \alpha < 1,\ \forall\ n \geq 2,\ \frac{1}{n^\alpha.\ln(n)} \geq \frac{1}{n.\ln(n)}$,

et donc par minoration (d'une série à termes positifs), la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha.\ln(n)}$ diverge.

c. Pour : $\alpha \geq 2$, et : $\forall\ \beta \in \mathbb{R}$, on a : $\forall\ n \geq 2,\ \frac{1}{n^\alpha.(\ln(n))^\beta} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.\frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}}$.

Or puisque : $\alpha - \frac{3}{2} > 0$, le théorème des croissances comparées montre que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}} = 0$.

Donc : $\frac{1}{n^\alpha.(\ln(n))^\beta} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, et la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha.(\ln(n))^\beta}$ converge, par comparaison.

Produit de Cauchy.

49. Montrer que le produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ par elle-même converge.

Si on note a_n le terme général de cette série et b_n celui de la série correspondant au produit de Cauchy proposé, on a :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}.\frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} = (-1)^n.\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1).(n-k+1)} = \frac{(-1)^n}{n+2}.\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\right).$$

De plus : $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1} = 2.H_{n+1}$,

avec le changement d'indice : $p = n-k$, dans la deuxième somme.

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ b_n = (-1)^n.\frac{2.H_{n+1}}{n+2}$.

La série est donc alternée et son terme général tend vers 0 puisque : $|b_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2.\ln(n+1)}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2.\ln(n)}{n}$.

Enfin : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |b_{n+1}| - |b_n| = 2.\left(\frac{H_{n+2}}{n+3} - \frac{H_{n+1}}{n+2}\right) = 2.\frac{(n+2).H_{n+2} - (n+3).H_{n+1}}{(n+3).(n+2)}$,

et : $(n+2).H_{n+2} - (n+3).H_{n+1} = (n+2).(H_{n+1} + \frac{1}{n+2}) - (n+3).H_{n+1} = 1 - H_{n+1} \leq 0$.

Donc la série $\sum_{b\geq 0} b_n$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées et à ce titre, converge.

Remarque : évidemment ici la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ n'est pas absolument convergente.

50. Pour : $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $\forall\ n \geq 2,\ u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha.(n-k)^\alpha}$.

a. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge pour : $\alpha \leq 0$.

b. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge pour : $1 < \alpha$.

c. A l'aide de la fonction : $x \mapsto x.(1-x)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge pour : $0 < \alpha \leq 1$.

Remarque générale : u_n est le terme général d'un produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ avec elle-même.

En effet, puisque la numérotation commence à 1, on a en notant $\sum_{n\geq 1} v_n$ ce produit de Cauchy :

$\forall\ n \geq 1,\ v_n = \sum_{\substack{p+q=n \\ 1\leq p,\, 1\leq q}}\frac{1}{p^\alpha}.\frac{1}{q^\alpha} = \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p^\alpha}.\frac{1}{(n-p)^\alpha} = u_n$, sachant que : $v_1 = 0$,

puisqu'on ne peut pas avoir : $1 \leq p$, $1 \leq q$, et : $p + q = 1$, autrement dit : $\forall\ n \geq 2,\ v_n = u_n$.

a. Si : $\alpha \leq 0$, alors : $\forall$ n $\geq$ 2, $u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha.(n-k)^\alpha} \geq \frac{1}{1^\alpha.(n-1)^\alpha} = (n-1)^{-\alpha}$,

et (u_n) ne tend pas vers 0 donc la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

b. Si : $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est le produit de Cauchy de deux séries (deux fois la même) absolument convergentes et donc converge.

c. Si : $0 < \alpha \leq 1$, alors la fonction : $x \mapsto x.(1-x)$, est positive sur]0,1[et en étudiant sa dérivée, on constate qu'elle atteint son maximum en $\frac{1}{2}$ où elle vaut $\frac{1}{4}$.

Donc : $\forall\ n \geq 2$, $\forall\ 1 \leq k \leq n-1$, $\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}.\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}$, puisque de plus la fonction : $x \mapsto x^{\alpha}$,
est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc :

$$\forall\ n \geq 2, \forall\ 1 \leq k \leq n-1,\ \frac{1}{k^{\alpha}.(n-k)^{\alpha}} = \frac{1}{n^{2.\alpha}}.\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}.\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\alpha}} \geq \frac{1}{n^{2.\alpha}}.4^{\alpha}.$$

Donc : $\forall\ n \geq 2$, $u_n \geq (n-1).\frac{1}{n^{2.\alpha}}.4^{\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha}}.4^{\alpha}$,
et la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge par comparaison d'une série à termes positifs avec une série de Riemann divergente.