Séries Numériques (corrigé niveau 1).

Séries télescopiques.

1. Etudier la nature de la série $\sum\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)$.

La série proposée est clairement télescopique, construite avec la suite (a_n) donnée par : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ a_n=e^{\frac{1}{n}}$.
Puisque (a_n) converge (vers 1), la série converge et sa somme vaut $e-1$.

2. Pour : $x\in\,]-1,+1[$, et : $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n=\dfrac{x^n}{(1-x^n).(1-x^{n+1})}$.
   a. Montrer que $(1-x).u_n$ peut se mettre sous la forme du terme général d'une série télescopique.
   b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ converge et préciser sa somme.

Ecrivons comme proposé : $(1-x).u_n=\dfrac{x^n-x^{n+1}}{(1-x^n).(1-x^{n+1})}=\dfrac{1}{(1-x^{n+1})}-\dfrac{1}{(1-x^n)}$,

et la série apparaît bien comme télescopique en posant : $\forall\ n\geq 1,\ a_n=\dfrac{1}{(1-x^n)}$.

Pour x dans l'intervalle proposé, (a_n) converge vers 1, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}(1-x).u_n$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-x).u_n=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}.$$

Puisque $1-x$ est non nul, la série $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ converge aussi et sa somme est $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

3. A l'aide d'une série télescopique, montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   On précisera à quel rang commence la série.

On peut écrire : $\forall\ n\geq 2,\ \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\ln(n^2-1)-\ln(n^2)=[\ln(n+1)-\ln(n)]-[\ln(n)-\ln(n-1)]$,

et la série est bien télescopique en posant : $\forall\ n\geq 2,\ a_n=\ln(n)-\ln(n-1)=-\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$,

puisque alors : $\forall\ n\geq 2,\ \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=a_{n+1}-a_n$, et : $\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)=a_{n+1}-a_2$.

Et comme la suite (a_n) converge (vers 0), la série est donc convergente et sa somme vaut :

$$0-a_2=0-\left(-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)=-\ln(2).$$

Remarque : la convergence de la série pouvait être obtenue simplement avec : $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{n^2}$.

4. Pour : $m\in\mathbb{N},\ m\geq 2$, on pose : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{n.(n+1)\ldots(n+m)}$.
   En étudiant $m.u_n$, montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ et calculer sa somme.

On peut s'inspirer d'une situation déjà rencontrée et chercher à mettre u_n sous forme télescopique.

Toujours en s'inspirant d'un exercice déjà vu, on peut poser : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{n.(n+1)...(n+m-1)}$.

On constate alors que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)...(n+1+m-1)} - \frac{1}{n.(n+1)...(n+m-1)} = \frac{n-(n+m)}{n.(n+1)...(n+1+m-1)},$$

autrement dit : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} - a_n = -m.u_n$.

Puisque la suite (a_n) converge clairement vers 0, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 1}(a_{n+1}-a_n)$ converge, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ aussi.

Enfin : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = -\dfrac{1}{m}.\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n) = -\dfrac{1}{m}.(0-a_1) = \dfrac{1}{m}.\dfrac{1}{m!} = \dfrac{1}{m.m!}$.

Séries à termes positifs ou de signe constant.

5. Utilisation d'équivalents et de développements limités.
   Préciser la nature des séries suivantes en indiquant à partir de quel terme sont définies ces séries.

   a. $\sum \dfrac{n}{n^2+1}$, b. $\sum \dfrac{ch(n)}{ch(2.n)}$, c. $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$, d. $\sum \left[e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$.

a. La série est à termes positifs et : $\dfrac{n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$,

donc la série diverge puisque la série harmonique diverge.

b. La série est à termes positifs et : $\dfrac{ch(n)}{ch(2.n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{e^{2.n}} = e^{-n}$.

Comme cette dernière série est géométrique, de raison positive strictement intérieure à 1, elle converge et la série de départ aussi.

c. Utilisons un développement limité pour cette troisième série en écrivant :

$$\forall\ n \geq 1,\ u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \ln(n^2+n+1) - \ln(n^2+n-1) = \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$$

Puis par exemple : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = \left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) - \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^2 + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

De même : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right) = \left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right) - \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^2 + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Finalement : $u_n = \dfrac{2}{n^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

On peut aussi écrire : $\forall\ n \geq 1,\ u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n-1+2}{n^2+n-1}\right) = \ln\left(1+\dfrac{2}{n^2+n-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2+n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

d. Pour cette dernière série, on écrit simplement :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n.\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e.\exp\left(-\frac{1}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

soit : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.\left(1 - \dfrac{1}{2.n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$, et donc : $e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{e}{2.n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Finalement, les deux séries sont toutes deux positives (également garanti à partir d'un certain rang) et la seconde est divergente, donc la série proposée l'est aussi.

6. Etudier la convergence des séries suivantes :

a. $\sum n^2.e^{-\sqrt{n}}$, b. $\sum \dfrac{n!}{\ln(n).e^{2.n}}$, c. $\sum \dfrac{1}{n.\sqrt[n]{n}}$.

a. La première série converge car : $n^2.(n^2.e^{-\sqrt{n}}) = n^4.e^{-\sqrt{n}}$, tend vers 0 en $+\infty$.

b. $\sum \dfrac{n!}{\ln(n).e^{2.n}}$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0 (théorème des croissances comparées).

c. $\sum \dfrac{1}{n.\sqrt[n]{n}}$ diverge car c'est une série à termes positifs et : $\dfrac{1}{n.\sqrt[n]{n}} = \dfrac{1}{n}.\exp\left(-\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série proposée diverge.

7. On pose : $u_n = \dfrac{n!.e^n}{n^n}.n^\alpha$, où : $\alpha \in \mathbb{R}$, et : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

a. A l'aide d'un développement limité, étudier la nature de la série $\sum v_n$ selon la valeur de α.

b. En déduire, pour une valeur de α bien choisie, un équivalent de $n!$ en $+\infty$ (avec une constante dont on ne cherchera pas la valeur) soit le début de la formule de Stirling.

a. Tout d'abord, les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, donc (v_n) est bien définie.

Puis : $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\dfrac{(n+1).n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) + 1 + \alpha.\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = -n.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + 1 + \alpha.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

On utilise alors un développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 3 pour le premier logarithme et à l'ordre 2 pour l'autre, et :

$$v_n = -n.\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + \frac{1}{3.n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1 + \alpha.\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \left(\alpha + \frac{1}{2}\right).\frac{1}{n} - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\right).\frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Distinguons alors plusieurs cas :

- $\alpha > -\dfrac{1}{2}$; on a : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\alpha + \dfrac{1}{2}\right).\dfrac{1}{n}$, et les deux séries ont des termes généraux de même signe (positif) à partir d'un certain rang, la seconde divergeant et la série $\sum v_n$ aussi.
- $\alpha < -\dfrac{1}{2}$; on a toujours : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\alpha + \dfrac{1}{2}\right).\dfrac{1}{n}$, et le même argument (pour des séries à termes négatifs cette fois) montre que la série $\sum v_n$ diverge encore.
- $\alpha = -\dfrac{1}{2}$; on a cette fois : $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12}.\dfrac{1}{n^2}$, et les deux séries ont des termes généraux de même signe (négatif) à partir d'un certain rang mais cette fois convergent.

b. Pour : $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, la série $\sum v_n$ converge donc la suite $(\ln(u_n))$ converge vers une valeur réelle L.

Donc (u_n) converge vers : $C = e^L > 0$, ce qui s'écrit encore : $u_n \underset{+\infty}{\sim} C$, d'où l'équivalent (qui correspond au début de la formule de Stirling) : $n! \underset{+\infty}{\sim} C.n^n.e^{-n}.n^{-\left(-\frac{1}{2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} C.n^n.e^{-n}.\sqrt{n}$

8. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries à termes réels strictement positifs convergentes.

Montrer à l'aide de majorations que les séries dont les termes généraux sont donnés ci-dessous sont encore convergentes :

a. $\max(u_n, v_n)$, b. $\sqrt{u_n.v_n}$, c. $\dfrac{u_n.v_n}{u_n + v_n}$.

Toutes les séries évoquées sont à termes réels positifs.

a. On peut écrire simplement : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le \max(u_n, v_n) \le u_n + v_n$.

Donc par majoration (pour des séries à termes positifs), la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.

b. On a encore : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le \sqrt{u_n.v_n} \le \dfrac{u_n + v_n}{2}$, car : $\dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n.v_n} = \dfrac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2}$.

Donc à nouveau par majoration, la série $\sum \sqrt{u_n.v_n}$ converge.

c. On a toujours : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le \dfrac{u_n.v_n}{u_n + v_n} \le \dfrac{u_n + v_n}{2}$, car : $(u_n + v_n)^2 - 2.u_n.v_n = (u_n - v_n)^2$.

Une fois de plus par majoration, la série $\sum \dfrac{u_n.v_n}{u_n + v_n}$ converge.

9. Soit $\sum u_n$ une série de réels positifs, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

a. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge aussi.

b. Montrer qu'on peut exprimer u_n à l'aide de v_n pour tout n, et en déduire la réciproque de l'implication précédente.

a. Puisque $\sum u_n$ est à termes positifs, les termes de $\sum v_n$ sont définis et positifs.

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le \dfrac{u_n}{1 + u_n} \le u_n$, donc par majoration de série à termes positifs, $\sum v_n$ converge.

b. Si maintenant on suppose que $\sum v_n$ converge, alors son terme général v_n tend vers 0.

De plus : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{v_n}{1 - v_n} \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est donc convergente.

10. Soit $\sum\limits_{n \ge 1} a_n$ une série à termes strictement positifs et convergente.

Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \ge 1} a_n^{1 + \frac{1}{n}}$?

Puisque la série $\sum a_n$ converge, son terme général a_n tend vers 0.

Dans ce cas, il existe un rang n_0 tel que : $\forall\ n \ge n_0,\ 0 < a_n \le 1$, et donc : $a_n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\dfrac{\ln(a_n)}{n}\right) \le 1$.

Donc : $\forall\ n \ge n_0,\ 0 < a_n^{1 + \frac{1}{n}} = a_n.a_n^{\frac{1}{n}} \le a_n$,

et la série $\sum\limits_{n \ge 1} a_n^{1 + \frac{1}{n}}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

11. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1 + \sqrt{1}).(1 + \sqrt{2})...(1 + \sqrt{n})}$.

a. Montrer par exemple par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 - \sqrt{n}.u_n$.

b. En remarquant qu'elle est à termes positifs, en déduire la nature de la série $\sum\limits_{n \ge 1} u_n$.

c. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

d. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

a. • Le résultat annoncé est vrai pour : $n=1$, puisque : $1-\sqrt{1}.u_1 = 1-\sqrt{1}.\frac{\sqrt{0!}}{1+\sqrt{1}} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = u_1 = \sum_{k=1}^{1} u_k$.

• Soit : $n\geq 1$, tel qu'on ait : $\sum_{k=1}^{n} u_k = 1-\sqrt{n}.u_n$.

Alors : $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1-\sqrt{n}.u_n + u_{n+1} = 1-\frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n})} + \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n+1})}$,

soit : $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1-\frac{\sqrt{n!}.(1+\sqrt{n+1}-1)}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n+1})} = 1-\frac{\sqrt{n!}.\sqrt{n+1}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n+1})} = 1-\sqrt{n+1}.u_{n+1}$,

ce qui termine la récurrence.

b. Comme il est clair que la série est à termes positifs, on en déduit que la suite des sommes partielles est croissante, puis que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq 1$, autrement dit que cette suite est majorée.

Donc la suite des sommes partielles converge et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ aussi.

c. La série $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est à termes positifs et : $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

donc par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

d. Si on note alors : $\forall\ n\geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{(1+\sqrt{k})}{\sqrt{k}}\right) = \ln\left(\frac{(1+\sqrt{1})...(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n!}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}.u_n}\right), \text{ et : } \sqrt{n}.u_n = e^{-S_n}.$$

On en déduit, puisque : $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, du fait de la divergence de cette série à termes positifs, donc que :

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}.u_n = 0$, et finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

Pour un équivalent de u_n, on pourra se reporter à la feuille d'exercices « intégration », dans le paragraphe « comparaison série-intégrale » niveau 3.

12. Soit : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

a. Justifier l'existence de R_n, pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$.

b. A l'aide de séries géométriques, montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \leq \frac{1}{n.n!}$.

a. Pour n fixé, non nul, R_n apparaît comme le reste d'ordre n de la série exponentielle donnant e^1 et à ce titre est une série convergente.
On peut aussi constater que R_n est la somme d'une série vérifiant le critère de d'Alembert.

b. On peut ensuite écrire : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \frac{1}{n!}.\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$.

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ k\geq n+1$, $\frac{n!}{k!} = \frac{1}{(n+1)...k} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n}$.

Or la quantité majorante est le terme général d'une série géométrique convergente car : $\left|\frac{1}{n+1}\right| \le \frac{1}{2} < 1$.

Donc en sommant les inégalités précédentes pour k variant de $n+2$ à $+\infty$, on obtient :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{p} = \frac{1}{n+1}.\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}, \text{ et : } R_n = \frac{1}{n!}.\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \le \frac{1}{n.n!}.$$

Séries de signe quelconque, sommes de séries.

13. Quelle est la nature d'une série dont le terme général est la somme des termes généraux d'une série absolument convergente et d'une série semi-convergente ?

La série est alors convergente, puisque somme de deux séries convergentes.

Notons ensuite : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = a_n + u_n$, où $\sum a_n$ est absolument convergente et $\sum u_n$ semi-convergente.

Si la série $\sum v_n$ était absolument convergente, on aurait :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - a_n$, donc : $|u_n| \le |v_n| + |a_n|$,

et la série $\sum (|v_n| + |a_n|)$ étant convergente, la série $\sum |u_n|$ serait aussi convergente ce qui n'est pas le cas.

Donc la série $\sum v_n$ n'est que semi-convergente.

14. On admet que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer la convergence des séries suivantes, puis à l'aide de sommes partielles, calculer leur somme.

a. $\sum_{n\ge 0} \frac{1}{(2.n+1)^2}$, b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

a. La série est convergente puisque : $\forall\ n \ge 1,\ 0 \le \frac{1}{(2.n+1)^2} \le \frac{1}{4.n^2}$,

et par majoration la série considérée est bien convergente.

Puis : $\forall\ n \ge 0,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2.k+1)^2} = \sum_{p=1}^{2.n+1} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2.p)^2} = \sum_{p=1}^{2.n+1} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}.\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = S_{2.n+1} - \frac{1}{4}.S_n$,

où S_n est la somme partielle de la série dont on donne la somme.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2.n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}.\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

b. La seconde série est absolument convergente et : $\forall\ n \ge 0,\ \sum_{k=1}^{2.n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.k)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2.k+1)^2}$.

Donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.k)^2} - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2.k+1)^2} = \frac{1}{4}.\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{2}{24}.\pi^2 = -\frac{\pi^2}{12}$.

15. On admet que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Montrer la convergence des séries suivantes, puis en transformant le terme général, calculer leur somme.

a. $\sum \frac{n^2}{n!}$, b. $\sum \frac{n^3 - n}{n!}$.

Pour les deux séries, plusieurs façons de montrer leur convergence.

a. On peut écrire pour la première (comme pour la deuxième) : $\frac{n^2}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n.(n-1)}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(n-2)!}$,

d'où la convergence de la série (par équivalence de séries à termes positifs), ou :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2.\dfrac{n^2}{n!} = 0$, du fait du théorème des croissances comparées, d'où la convergence de la série.

Puis on écrit : $\forall\ n \geq 2,\ n^2 = n.(n-1)+n$, et : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^2}{n!} = 0+1+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n.(n-1)+n}{n!} = 1+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n.(n-1)}{n!}+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n}{n!}$,

puisque les deux séries qui apparaissent sont convergentes.

Enfin : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^2}{n!} = 1+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(n-2)!}+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(n-1)!} = 1+\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p!}+\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{p!} = 1+e+(e-1) = 2.e$,

à l'aide de translations d'indice dans les deux dernières sommes de séries.

b. En raisonnant de la même façon, et à partir de :

$\forall\ n \geq 3,\ n_3 - n = n.(n-1).(n-2)+3.n^2-3.n = n.(n-1).(n-2)+3.n.(n-1)$, on aboutit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3-n}{n!} = 0+0+\frac{6}{2!}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n.(n-1).(n-2)+3.n.(n-1)}{n!} = 3+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n.(n-1).(n-2)}{n!}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{3.n.(n-1)}{n!},$$

et à nouveau : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^3-n}{n!} = 3+\sum\limits_{p=3}^{+\infty}\dfrac{1}{p!}+3.\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{p!} = 3+e+3.(e-1) = 4.e$.

16. A l'aide de séries géométriques, étudier la convergence et la somme éventuelle des séries suivantes :

a. $\sum 2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\dfrac{n.\pi}{4}\right).x^n$, $x \in \mathbb{R}$,

b. $\sum x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

a. Pour : $n = 4.k+2$, on a : $2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\dfrac{n.\pi}{4}\right).x^n = 2^{2.k+1}.x^{4.k+2}.(-1)^k = (-1)^k.2.x^2.(2.x^2)^{2.k}$.

Si ce terme général ne tend pas vers 0, la série diverge donc une condition nécessaire pour qu'elle converge est : $\left|2.x^2\right| < 1$, soit : $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour ces valeurs de x, on peut alors écrire : $2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\dfrac{n.\pi}{4}\right).x^n = \dfrac{1}{2.i}.[(\sqrt{2}.x.e^{i.\frac{\pi}{4}})^n - (\sqrt{2}.x.e^{-i.\frac{\pi}{4}})^n]$.

Les deux séries géométriques qui apparaissent sont alors convergentes (de raison en module strictement plus petites que 1) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\frac{n.\pi}{4}\right).x^n = \frac{1}{2.i}.[\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2}.x.e^{i.\frac{\pi}{4}})^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2}.x.e^{-i.\frac{\pi}{4}})^n] = \frac{1}{2.i}.\left[\frac{1}{1-\sqrt{2}.x.e^{i.\frac{\pi}{4}}}-\frac{1}{1-\sqrt{2}.x.e^{-i.\frac{\pi}{4}}}\right].$$

En réduisant au même dénominateur, on aboutit à : $\forall\ |x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\dfrac{n.\pi}{4}\right).x^n = \dfrac{x}{1-2.x+2.x^2}$.

b. Pour la deuxième série, elle converge pour : $x = 0$, et sinon s'écrit : $\sum x^{2n+1} = x.\sum(x^2)^n$.

x étant maintenant supposé non nul, ces séries ont même comportement et convergent si et seulement si : $\left|x^2\right| < 1$, soit encore : $|x| < 1$.

Pour ces valeurs de x, on a alors : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{2.n+1} = x.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n = \dfrac{x}{1-x^2}$.

17. Pour : $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sin(\pi.(2+\sqrt{3})^n)$.

a. Montrer à l'aide du binôme de Newton que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n]$ est un entier pair.

b. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

a. On utilise pour cela la formule du binôme de Newton (en posant : $\varepsilon = \pm 1$) et :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(2+\varepsilon.\sqrt{3})^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}.2^{n-k}.\varepsilon^k.\sqrt{3}^k$, puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ (2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.2^{n-k}.\sqrt{3}^k.(1+(-1)^k).$$

Dans la dernière somme ne restent que les k pairs ($k=2.p$), et :

$$(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2.\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2.p}.2^{n-2.p}.3^p,$$

Enfin la somme en facteur étant un entier, la quantité proposée est bien un entier pair que l'on notera $2.N_n$.

b. On peut alors écrire : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_n=\sin(2.N_n.\pi-\pi.(2-\sqrt{3})^n)=-\sin(\pi.(2-\sqrt{3})^n)$.

Il est clair que la quantité dans le sinus tend vers 0 (suite géométrique) donc :

$u_n \underset{+\infty}{\sim} -\pi.(2-\sqrt{3})^n$.

Par équivalence de séries à termes négatifs, la série $\sum u_n$ converge, l'autre étant géométrique et convergente.

18. Déterminer a et b pour que $\sum(\ln(n)+a.\ln(n+1)+b.\ln(n+2))$ converge et sommer alors la série.

On peut utiliser des développements limités en $+\infty$, et :

$$\forall\ n\geq 1,\ \ln(n)+a.\ln(n+1)+b.\ln(n+2)=(1+a+b).\ln(n)+a.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b.\ln\left(1+\frac{2}{n}\right),\text{ soit :}$$

$$\forall\ n\geq 1,\ \ln(n)+a.\ln(n+1)+b.\ln(n+2)=(1+a+b).\ln(n)+(a+2.b).\frac{1}{n}-\frac{a+4.b}{2}.\frac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc il est nécessaire que : $a+b+1=0$, pour que (u_n) tende vers 0.

Si cette condition est remplie et si : $a+2.b\neq 0$, le terme général de la série est équivalent à celui d'une série de signe constant et divergente $\left(\sum(a+2.b).\frac{1}{n}\right)$, donc $\sum u_n$ diverge.

On doit donc choisir : $a+b+1=0$, $a+2.b=0$, soit : $b=1$, $a=-2$.

Dans ce cas : $u_n=-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{n^2}$, et la série $\sum u_n$ converge.

Pour calculer sa somme on peut revenir à des sommes partielles ou remarquer que :

$\forall\ n\geq 1,\ u_n=(\ln(n)-\ln(n+1))-(\ln(n+1)-\ln(n+2))$, soit le terme général d'une série télescopique.

Finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=[\ln(1)-\ln(2)]-\lim_{n\to+\infty}[\ln(n)-\ln(n+1)]=-\ln(2)$.

Produit infini.

19. Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

On pose : $\forall\ N\in\mathbb{N},\ P_N=\prod_{n=0}^{N}u_n$.

a. Montrer que : ((P_N) converge vers une limite non nulle) $\Leftrightarrow$ ($\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ converge).

b. Que dire si (P_N) tend vers 0 ?

a. On peut commencer par remarquer que : $\forall\ N\in\mathbb{N},\ \ln(P_N)=\ln(\prod_{n=0}^{N}u_n)=\sum_{n=0}^{N}\ln(u_n)$.

- si on suppose (P_N) convergente vers L non nulle, la continuité de $\ln$ en L montre que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ converge vers $\ln(L)$ et la série $\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ converge.
- si on suppose que la série $\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ converge vers L, alors la suite ($\ln(P_N)$) converge vers L et par

continuité de exp en L, (P_N) converge vers e^L qui est bien non nulle.

b. Si (P_N) tend vers 0, la suite ($\ln(P_N)$) tend vers -∞, et la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ diverge vers -∞ : dans ce cas, la série $\sum_{n\geq 0}\ln(u_n)$ diverge.

Séries alternées et autour des séries alternées.

20. Etudier la convergence de :

a. $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, b. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\cos\left(\frac{1}{n}\right)$, c. $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}}$.

a. La première série est définie pour : $n \geq 2$, et est bien alternée puisqu'alors le dénominateur garde un signe constant.

Puis : $\forall\ n\geq 2$, $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1-\frac{(-1)^n}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Si on note u_n le terme général de cette série, alors u_n apparaît comme la somme de deux termes :

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, et $\sum_{n\geq 2} a_n$ converge du fait du critère spécial,

$b_n = -\frac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$, et $\sum_{n\geq 2} b_n$ converge, par comparaison de séries à termes négatifs.

Finalement $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

b. Pour la deuxième série, elle est encore alternée puisque l'argument du cosinus reste entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Puis : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\left(1+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$.

A nouveau le terme général v_n de la série s'écrit encore : $u_n = a_n + b_n$, avec $\sum a_n$ convergente du fait du critère spécial, et $\sum b_n$ absolument convergente car de terme général négligeable devant celui d'une série absolument convergente, donc convergente, et donc comme somme des séries convergentes, la série $\sum u_n$ converge.

c. Pour la troisième série, elle est alternée à partir du rang 2, et :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1+\frac{(-1)^n.\sqrt{n+1}}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1},$$

d'où : $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.(1+o_{+\infty}(1))\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$,

soit finalement : $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n.\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$.

Le terme général de la série s'écrit à nouveau : $u_n = a_n + b_n$, avec $\sum a_n$ convergente du fait du critère spécial, et $\sum b_n$ absolument convergente avec un équivalent, donc toujours comme somme, la série $\sum u_n$ converge.

21. Etudier la convergence de la série $\sum \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right)$, avec : $\alpha \in \mathbb{R}$.

On commence par noter que les termes de cette série sont définis au moins à partir d'un certain rang. En effet, pour : $n \geq n_0 = \max(2,\lfloor -\alpha \rfloor + 1)$, on a : $\sqrt{n} > (-1)^{n+1}$, et : $n+\alpha > 0$.

Puis : $\forall\ n \geq n_0$, $\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}} = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).\left(1-\dfrac{\alpha}{2.n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

En développant, on obtient : $\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}} = 1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{\alpha}{2.n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$,

puis : $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right) = \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{\alpha}{2.n}\right)-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{\alpha+1}{2.n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right) = a_n + b_n$.

Puis :

- on pose : $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et $\sum a_n$ converge avec le critère spécial,
- et : $b_n = -\dfrac{\alpha+1}{2.n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$, et $\sum b_n$

  - diverge si : $\alpha \neq -1$, car : $b_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\alpha+1}{2.n}$, et par comparaison de séries de signe constant,

  - converge si : $\alpha = -1$, car alors : $b_n = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$.

Comme somme de deux séries, la série $\sum \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right)$ converge si et seulement si : $\alpha = -1$.

22. Etudier la convergence des séries $\sum_{n\geq 1}(-1)^n.n^{\alpha}.\left(\dfrac{1}{n}-\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ et $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1+(-1)^n.n^{\alpha}}{n^{2.\alpha}}$, pour : $\alpha \in \mathbb{R}$.

- On note de même : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n.n^{\alpha}.\left(\dfrac{1}{n}-\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n.n^{\alpha}.\left(\dfrac{1}{6.n^3}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{6.n^{3-\alpha}}$.

  - Si : $3-\alpha \leq 0$, c'est-à-dire : $3 \leq \alpha$, u_n ne tend pas vers 0 et la série $\sum u_n$ diverge.
  - Si : $3-\alpha > 0$, c'est-à-dire : $3 > \alpha$, on peut préciser :

    $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n.n^{\alpha}.\left(\dfrac{1}{6.n^3}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^5}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{6.n^{3-\alpha}}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^{5-\alpha}}\right) = a_n + b_n$.

  et $\sum a_n$ converge (critère spécial des séries alternées) et $\sum b_n$ converge absolument car : $5-\alpha > 2$.

  Donc la série converge si et seulement si : $3 > \alpha$.

- Notons : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1+(-1)^n.n^{\alpha}}{n^{2.\alpha}} = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}}+\dfrac{1}{n^{2.\alpha}} = a_n + b_n$.

  - Si : $\alpha < 0$, alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2.\alpha}}$, et (u_n) tend vers $+\infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge.
  - Si : $\alpha = 0$, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1+(-1)^n$, et (u_n) ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge.
  - Si : $\alpha > 0$, alors $\sum a_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées et $\sum b_n$ converge si et seulement si : $2.\alpha > 1$, soit : $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

  Dans ce dernier cas, la série $\sum u_n$ converge donc (comme somme) si et seulement si : $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

23. Soit (u_n) la suite définie par :
    - $u_0 > 0$, et :
    - $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1-e^{-u_n}$.

    a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie, convergente et déterminer sa limite.

b. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n.u_n$

c. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0}u_n^2$.

d. En utilisant la série $\sum_{n\geq 0}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0}u_n$.

a. Il est immédiat que u_n existe pour tout entier n.

De plus, on montre également par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

En effet, on a : $u_0 > 0$, et si pour une valeur : $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n > 0$, alors : $e^{-u_n} < 1$, et : $u_{n+1} > 0$.

Enfin, si on pose que : $\forall\ x > 0,\ f(x) = 1 - e^{-x} - x$, alors : $f'(x) = e^{-x} - 1 < 0$.

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme : $f(0) = 0$, f est strictement négative sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On peut noter que : $f(x) = x$, a pour unique solution : $x = 0$, sur $\mathbb{R}^+$.

De plus : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) \leq 0$,

et la suite (u_n) est décroissante ; étant de plus minorée par 0, (u_n) est donc convergente.

Sa limite L est positive et vérifie (puisque f est continue sur $\mathbb{R}$) : $0 = L - L = f(L)$, donc : $L = 0$.

b. Puisque (u_n) est décroissante et tend vers 0, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n.u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées et donc converge.

c. Toujours parce que (u_n) tend vers 0, on a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = 1 - \left(1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o_{+\infty}(u_n^2)\right) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o_{+\infty}(u_n^2).$$

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n - u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} + o_{+\infty}(u_n^2) \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$, et : $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} 2.(u_n - u_{n+1})$.

Or la série télescopique $\sum_{n\geq 0}(u_n - u_{n+1})$ converge puisque la suite (u_n) converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0}u_n^2$ converge aussi.

d. La série $\sum_{n\geq 0}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est télescopique et divergente puisque :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n),$$ et la suite $(\ln(u_n))$ diverge vers -∞.

Puis on repart de l'égalité : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o_{+\infty}(u_n^2)$, d'où on déduit que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{u_n}{2} + o_{+\infty}(u_n),\ \text{et : } \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n}{2} + o_{+\infty}(u_n)\right) = -\frac{u_n}{2} + o_{+\infty}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{2}.$$

Par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum_{n\geq 0}-\frac{u_n}{2}$ diverge donc ainsi que la série $\sum_{n\geq 0}u_n$.

Vrai-faux.

24. Quelles affirmations parmi les suivantes sont vraies ?

a. ($\sum u_n$ converge) $\Rightarrow$ ((u_n^2) converge).

b. ($\sum u_n$ diverge) $\Rightarrow$ ($\sum u_n^2$ diverge).

c. ($\sum u_n$ converge, $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$) $\Rightarrow$ ($\sum u_n^2$ converge).

d. ($\sum u_n$ converge, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \neq -1$) $\Rightarrow$ ($\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge).

a. Vrai car si $\sum u_n$ converge, la suite (u_n) tend vers 0 et la suite (u_n^2) aussi.

b. Faux car $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge.

c. Vrai car (par exemple) si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) tend vers 0, et : $u_n^2 = u_n.u_n = o_{+\infty}(u_n)$.

Or $\sum u_n$ est absolument convergente (car à termes positifs et convergente) donc $\sum u_n^2$ converge.

d. Faux comme le montre le contrexemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, pour : $n \geq 2$.

En effet dans ce cas, le terme général de la deuxième série s'écrit :

$$\forall\ n \geq 2,\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right),$$

et ce terme général est la somme des termes généraux d'une série semi-convergente et d'une série divergente.

Remarque : l'implication devient vraie si (u_n) est à termes positifs, car si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) tend vers 0 et : $\frac{u_n}{1+u_n} \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

Autour de la série harmonique.

25. On pose, pour : $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2.n}$.

Montrer la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

On commence par remarquer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = H_{2.n} - H_n = (\ln(2.n) + \gamma + \varepsilon(2.n)) - (\ln(n) + \gamma + \varepsilon(n))$,

et : $u_n = \ln(2) + \varepsilon(2.n) - \varepsilon(n)$, où la fonction ε tend vers 0 en $+\infty$.

(u_n) est donc convergente de limite $\ln(2)$.

Remarque : on peut également obtenir ce résultat par exemple avec des sommes de Riemann.

26. a. Rappeler la valeur de $(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$, pour : $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$.

c. A l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer sa somme.

a. On se souvient que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$,

que l'on peut redémontrer par récurrence.

b. Puis : $\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2} = \frac{6}{n.(n+1).(2.n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^3}$,

d'où la convergence, par comparaison de séries à termes positifs.

c. Enfin : $\frac{6}{X.(X+1).(2.X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2.X+1}$, et : $a = 6$, $b = 6$, $c = -24$.

On revient ensuite aux sommes partielles pour écrire :

$$\forall\ N \geq 2,\ S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{6}{n.(n+1).(2.n+1)} = 6.\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 6.\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} - 24.\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2.n+1}.$$

De plus : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2.n+1} = \sum_{n=1}^{2.N+1}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2.n} - 1$.

On termine avec : $S_N = 6.H_N + 6.(H_{N+1} - 1) - 24.(H_{2.N+1} - \frac{H_N}{2})$,

et : $S_N = 18.[\ln(N) + \gamma + \varepsilon(N)] + 6.[\ln(N+1) + \gamma + \varepsilon(N+1) - 1] - 24.[\ln(2.N+1) + \gamma - 1 + \varepsilon(2.N+1)]$, puis : $S_N = 18 - 24.\ln(2) + 6.\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) - 24.\ln\left(1 + \frac{1}{2.N}\right) + 18.\varepsilon(N) + 6.\varepsilon(N+1) - 24.\varepsilon(2.N+1)$,

et finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} = \lim_{N \to +\infty} S_N = 18 - 24.\ln(2)$.