Révisions d'analyse (corrigé des plus).

Exercices 2013-2014.

Limite des fonctions de variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

47. • Supposons que x soit un rationnel, de la forme : $x = \frac{a}{b}$, avec : $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$.

Alors : $\forall n \geq$,max(b,4), $n!.x = a.\frac{n!}{b}$, où $\frac{n!}{b}$ est un entier qui comporte au moins un facteur 2, donc pair.

Donc : $\cos(n!.x.\pi) = 1$, et la suite $((\cos(n!.x.\pi))^{2.p})_p$ est constante égale à 1, donc tend vers 1.

La suite $\left(\lim\limits_{p\to+\infty}(\cos(n!.\pi.x))^{2.p}\right)_{n\geq 4}$ est donc constante à la valeur 1 et tend vers 1, autrement dit : f(x) = 1.

• Supposons que x soit irrationnel, et soit n un entier donné.

Alors : $(\cos(n!.x.\pi) = \pm 1) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, n!.x.\pi = k.\pi) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{n!})$, et x serait rationnel.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\cos(n!.x.\pi)| < 1$, et la suite $((\cos(n!.x.\pi))^{2.p})_p$ est géométrique de raison strictement inférieure à 1 donc tend vers 0.

La suite $\left(\lim\limits_{p\to+\infty}(\cos(n!.\pi.x))^{2.p}\right)_{n\geq 4}$ est donc constante à la valeur 0 et tend vers 0, autrement dit : f(x) = 0.

Continuité des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$.

48. a. Comme dans l'exercice où l'on suppose f dérivable : f(0).f(0) = f(0), et : f(0) = 0 ou 1.

b. Si : f(0) = 0, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, f(x).f(0) = 0 = f(x+0) = f(x), et f est constante égale à 0.
Réciproquement, la fonction nulle répond au problème.

c. On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \alpha^n$.
D'autre part : f(0) = f(1 – 1) = f(1).f(-1), et : $1 = \alpha.f(-1)$.
On en déduit que : $\alpha \neq 0$, puis que : $f(-1) = \alpha^{-1}$.
Plus généralement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 1 = f(0) = f(n).f(-n), et : $f(-n) = \alpha^{-n}$.

d. Remarquons tout d'abord que f est à valeurs positives.

En effet : $\forall x \in \mathbb{R}$, f(x) = $f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$, et en particulier : $\alpha > 0$.

Soit maintenant : $r = \frac{p}{q}$, avec : $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

On a : $\alpha^p = f(p) = f(r.q) = f(r)^q$, avec une récurrence immédiate sur q, donc : $f(r) = +(\alpha^p)^{\frac{1}{q}} = \alpha^{\frac{p}{q}} = \alpha^r$.

e. Soit maintenant un réel quelconque x.
Il existe une suite de rationnels (r_n) qui converge vers x, et puisque f est continue :

$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{r_n} = \alpha^x$.

f est donc une fonction exponentielle puisque si on note : $a = \ln(\alpha)$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{a.x}$.

f. La démarche étant une analyse-synthèse, on constate que les candidats trouvés lors de l'analyse sont bien des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient l'identité imposée : ce sont <u>les</u> solutions du problème.

49. a. Pour u fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction : $x \mapsto f(x) + u.g(x)$, est continue sur [0,1] comme combinaison linéaire.
Donc elle y admet un sup et : $M(u) = \sup\limits_{x\in[0,1]}(f(x) + u.g(x))$, existe et est atteint en au moins un point.

Soit : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\exists t_u$, $M(u) = f(t_u) + u.g(t_u)$.

b. Pour : $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire : $M(u) = f(t_u) + u.g(t_u) = f(t_u) + v.g(t_u) + (u – v).g(t_u)$.
On peut alors majorer les deux termes qui apparaissent et : $M(u) \leq M(v) + (u – v).C$,
soit bien : $M(u) – M(v) \leq C.(u – v)$.

c. De même, en renversant les rôles : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $M(v) – M(u) \leq (v – u).C$.
On en déduit que les deux quantités (opposées) [M(u) – M(v)] et [M(v) – M(u)] sont majorées par $C.|u – v|$, donc : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $|M(u) – M(v)| \leq C.|u – v|$, et M est bien C-lipschitzienne.

50. a. f est donc supposée bijective (égale à sa réciproque) et continue, donc elle est strictement monotone.
Or si f était décroissante, on aurait : f([0,+∞)) = ($\lim_{x\to+\infty} f(x)$,f(0)].
Alors : fof([0,+∞)) ⊂ ($\lim_{x\to+\infty} f(x)$,f(0)], et fof ne pourrait être l'identité sur [0,+∞).
Donc f est strictement croissante sur [0,+∞).
b. Supposons maintenant que : ∃ x ∈ $\mathbb{R}^+$, f(x) ≠ x, par exemple : f(x) < x.
Alors : x = f(f(x)) < f(x) < x, ce qui est absurde.
Le même raisonnement montre que : f(x) > x, est également impossible.
Donc : f = $id_{[0,+\infty)}$.

Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles.

51. Pour : c ∈]0,+∞), l'équation de la tangente à la courbe en ce point est : y – f(c) = f'(c)(x – c), et la tangente passe par l'origine, si et seulement si : f(c) = c.f'(c).
On va donc construire une fonction telle que l'annulation de sa dérivée conduise à l'égalité précédente.
On pose ainsi : ∀ x ∈]0,+∞), φ(x) = $\dfrac{f(x)}{x}$.
Cette fonction est continue sur [a,+∞), dérivable sur]a,+∞), et : ∀ x > a, φ'(x) = $\dfrac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}$.
De plus : φ(a) = φ(b) (= 0), donc il existe : c ∈]a,b[, tel que : φ'(c) = 0, ce qui prouve ce qui était demandé.
Remarque : si a est nul, φ se prolonge par continuité en : a = 0, avec : φ(0) = f'(0) = 0..

Développements limités.

52. a. La fonction : x ↦ tan(x) – x, est continue, strictement croissante sur I_n, vaut –n.π à une extrémité de I_n et tend vers +∞ à l'autre extrémité.
Il s'y annule donc en une unique valeur notée x_n..
b. Pour obtenir ce développement limité, on va travailler de proche en proche.
Tout d'abord : ∀ n ∈ ℕ, n.π ≤ x_n < n.π + $\dfrac{\pi}{2}$.
En divisant par n.π, et en passant à la limite, on constate que x_n est équivalent à n.π en +∞.
On pose alors : $\alpha_n = x_n - n.\pi \in [0,\dfrac{\pi}{2}[$.
On a donc : $\tan(x_n) = \tan(\alpha_n) = x_n$, soit : $\alpha_n = \text{Arctan}(x_n)$, et α_n tend vers $\dfrac{\pi}{2}$, puisque x_n tend vers +∞.
On note ensuite : $\beta_n = \dfrac{\pi}{2} - \alpha_n$.
Alors : $\tan(x_n) = \tan(\dfrac{\pi}{2} - \beta_n) = x_n$, donc : $\dfrac{1}{\tan(\beta_n)} = x_n$, ou : $\tan(\beta_n) = \dfrac{1}{x_n}$, et comme β_n tend vers 0, on peut encore écrire : $\tan(\beta_n) \underset{+\infty}{\sim} \beta_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n.\pi}$.
Enfin :

$$\tan(\beta_n) = \beta_n - \frac{\beta_n^3}{3} + o(\beta_n^3) = \beta_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$ et :

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n.\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} = \frac{1}{n.\pi}.\left(1 + \frac{1}{2.n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{n.\pi} - \frac{1}{2.n^2.\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où : $\beta_n = \dfrac{1}{n.\pi} - \dfrac{1}{2.n^2.\pi} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et finalement : $x_n = n.\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n.\pi} + \dfrac{1}{2.n^2.\pi} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Suites explicites.

53. a. Puisque la suite est à termes strictement positifs, il suffit d'étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et de le comparer à 1.

Or : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$*, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3.(n+1).n^n} = \frac{1}{3}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, et ce quotient tend vers : $\frac{e}{3}$ < 1.

Donc le quotient devient strictement inférieur à 1 à partir d'un certain rang et la suite (u_n) est décroissante à partir de ce rang.

b. Puisque de plus, elle est minorée par 0 (positive), elle converge vers une limite : L ≥ 0.

Enfin, si : L ≠ 0, alors $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ tend vers : $\frac{L}{L} = 1$, ce qui n'est pas le cas.

Donc : L = 0.

54. • La première suite peut s'étudier avec :

$\forall$ n ≥ 3, $1 \leq \frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!} = \frac{1!+2!+\ldots+(n-2)!}{n!} + \frac{1}{n-1} + 1 \leq (n-2).\frac{1}{n.(n-1)} + \frac{1}{(n-1)} + 1$,

et cet encadrement montre que (u_n) tend vers 1.

• Pour la deuxième, on a cette fois :

$\forall$ n ≥ 1, $\frac{n}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2} = 1$, et ($v_n$) tend vers 1.

• On remarque pour commencer que la suite des coefficients binomiaux est positive, croissante jusqu'à la valeur : k = n, puis décroissante.

Donc : $\forall$ n ≥ 2, $2 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{2.n}{2.k}} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{2.n}{2.k}} \leq 2 + (n-1).\frac{1}{\binom{2.n}{2}} = 2 + \frac{2.(n-1)}{2.n.(2.n-1)}$, et (w_n) tend vers 2.

Suites récurrentes linéaires.

55. Soit la suite (z_n) définie par : $z_0 \in \mathbb{C}$, et : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}.(z_n + |z_n|)$.

a. Pour un nombre complexe, une telle écriture est possible si et seulement s'il est non nul.

• si : z_0 = 0, la suite est nulle,

• z_0 est non nul, z_1 ne peut être nul que si z_0 est un réel strictement négatif, et tous les termes à partir de z_2 sont nuls.

• si z_0 n'est pas un réel négatif, mais est un réel positif, la suite (z_n) est constante à la valeur z_0.

• enfin, si z_0 est non réel, alors il est immédiat par récurrence que tous les z_n sont non réels donc non nuls.

On va donc se placer pour la suite dans l'hypothèse où : $z_0 \notin \mathbb{R}^-$, et dans ce cas :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\exists$ $\rho_n \in \mathbb{R}^{+*}$, $-\pi < \theta_n < \pi$, $z_n = \rho_n.e^{i.\theta_n}$.

b. La relation donnant z_{n+1} en fonction de z_n conduit à : $\rho_{n+1}.e^{i.\theta_{n+1}} = \frac{1}{2}.\rho_n.(1+e^{i.\theta_n}) = \rho_n.e^{i.\frac{\theta_n}{2}}.\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$.

Puisque : $-\pi < \theta_n < \pi$, le cosinus est positif et : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\rho_{n+1} = \rho_n.\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$, $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

La suite (θ_n) est géométrique et converge vers 0.

La suite (ρ_n) est positive donc minorée, et décroissante, donc convergente.

c. On peut multiplier l'égalité définissant θ_n par $2.\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$, et : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $2.\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right).\rho_{n+1} = \sin(\theta_n).\rho_n$.

On déduit facilement par récurrence que : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $2^n.\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right).\rho_n = \sin(\theta_0).\rho_0$.

D'où, en passant à la limite et à l'aide d'un équivalent : $\theta_0.L = \sin(\theta_0).\rho_0$.

Finalement, (z_n) converge vers $\dfrac{\mathrm{Im}(z_0)}{Arg(z_0)}$.

Suites adjacentes.

56. a. On pose évidemment : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, car : $f(0) \in [0,1]$, donc : $f(0) \geq 0$, et : $f(1) \in [0,1]$, donc : $f(1) \leq 1$.

Si maintenant on suppose construits $a_0, \ldots, a_n$, et $b_0, \ldots, b_n$, on calcule $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$ et deux possibilités se présentent :

- $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leq \dfrac{a_n + b_n}{2}$, et on pose alors : $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$,
- $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geq \dfrac{a_n + b_n}{2}$, et on pose alors : $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$.

b. Les deux suites précédentes étant clairement adjacentes, notons α leur limite commune.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha \leq b_n$, donc : $f(a_n) \leq f(\alpha) \leq f(b_n)$, et : $a_n \leq f(\alpha) \leq b_n$.
Si maintenant on fait tendre n vers $+\infty$, on constate que : $\alpha \leq f(\alpha) \leq \alpha$, et : $f(\alpha) = \alpha$.

Moyenne de Cesaro.

57. a. Supposons donc (u_n) réelle et croissante.
Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = \frac{n.u_{n+1} - (u_1 + \ldots + u_n)}{n.(n+1)} = \frac{(u_{n+1} - u_1) + \ldots + (u_{n+1} - u_n)}{n.(n+1)},$$

et cette dernière quantité étant positive, (v_n) est bien croissante.

b. Soit : $\varepsilon > 0$.

Puisque (u_n) converge vers L, on sait que : $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n - L| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Donc : $\forall n \geq n_0 + 1$, $|v_n - L| = \left|\dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n} - L\right| = \dfrac{1}{n}.\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0}(u_k - L) + \sum_{k=n_0+1}^{n_0}(u_k - L)\right|$.

Avec l'inégalité triangulaire, on obtient : $|v_n - L| \leq \dfrac{1}{n}..\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0}(u_k - L)\right| + \dfrac{n - n_0}{n}.\dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{C}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$,

où C désigne la quantité constante.
Comme la suite (C/n) tend vers 0, il existe un autre rang n_1 (qu'on peut choisir supérieur à n_0+1) tel que :

$\forall n \geq n_1$, $\dfrac{C}{n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, et : $|v_n - L| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Donc (v_n) converge bien vers L.

c. • La réciproque concernant la convergence est fausse comme le montre le contrexemple obtenu avec :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 0$, si n est pair, et $-\dfrac{1}{n}$ si n est impair.

(v_n) converge bien vers 0 mais (u_n) diverge.
• La réciproque de la deuxième implication est également fausse.

Soit par exemple (v_n) la suite définie par : $v_1 = 1$, $\forall n \geq 2$, $v_n = \dfrac{3}{2}$.

La suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$, $\forall n \geq 2$, $u_n = n.v_n - u_1 - \ldots - u_{n-1}$.
Il est immédiat de vérifier que la moyenne de Cesaro de (u_n) est (v_n) et elle n'est pas croissante car :

$u_1 = 1$, $u_2 = 2.\dfrac{3}{2} - 1 = 2$, $u_3 = 3.\dfrac{3}{2} - 1 - 2 = \dfrac{3}{2} < u_2$.

58. a. La suite est bien définie, à valeurs dans]0,1] et décroissante, avec la propriété classique :
$\forall x \in [0,1]$, $0 \leq \sin(x) \leq x$.
Donc la suite converge et comme sinus est continue, sa limite L vérifie : $\sin(L) = L$, donc : $L = 0$.

b. On a donc : ∀ n ∈ ℕ, $v_n = \frac{1}{(\sin(u_n))^\gamma} - \frac{1}{u_n^\gamma} = \frac{1}{\left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^\gamma} - \frac{1}{u_n^\gamma}$.

On peut alors obtenir : $v_n = \frac{1}{u_n^\gamma}.\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^{-\gamma} - 1\right) = \frac{\gamma}{6}.u_n^{2-\gamma} + o(u_n^{2-\gamma})$.

Si γ est nul, la suite (v_n) est constante nul, sinon : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\gamma}{6}.u_n^{2-\gamma}$.

Puisque, enfin, (u_n) tend vers 0, (v_n) converge vers une limite non nulle si et seulement si : γ = 2.

c. Puisque maintenant (v_n) converge vers $\frac{1}{3}$, en appliquant une moyenne de Cesaro à (v_n), la suite $\left(\frac{v_1 + ... + v_n}{n}\right)$ tend aussi vers $\frac{1}{3}$.

Donc : $\frac{v_1 + ... + v_{n-1}}{n-1} = \frac{1}{3} + o(1) = \frac{1}{n-1}.\left(1 - \frac{1}{u_n^2}\right)$, d'où : $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$, et finalement : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

59. a. La fonction itératrice de cette suite récurrente est f : x ↦ $\sqrt[3]{1+3.x} - 1$.
Elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et laisse $\mathbb{R}^+$ stable.
Donc la suite (u_n) est bien définie, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et monotone.
Comme de plus : $u_1 = \sqrt[3]{4} - 1 < \sqrt[3]{8} - 1 = 1$, (u_n) est décroissante.
Enfin, étant minorée par 0, elle converge et f admettant un unique point fixe dans $\mathbb{R}^+$ qui est 0 (-3 est un autre point fixe, (u_n) converge vers 0.

b. On part ensuite de : $\sqrt[3]{1+3.u_n} - 1 = \left(1 + \frac{1}{3}.3.u_n + \left(\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\frac{9.u_n^2}{2} + o(u_n^2)\right) - 1 = u_n - u_n^2 + o(u_n^2)$.

D'où : $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{u_n - u_n^2 + o(u_n^2)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n}.(1 - u_n + o(u_n))^{-1} - \frac{1}{u_n} = 1 + o(1)$.

Donc $(U_{n+1} - U_n)$ tend vers 1.
En utilisant une moyenne de Cesaro avec $(U_{n+1} - U_n)$, on constate que cette moyenne tend aussi vers 1.
D'où : ∀ n ∈ ℕ*, $\frac{1}{n-1}.(U_n - U_1) = 1 + o(1)$, d'où : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercices généraux sur les suites ; suites extraites.

60. a. La suite (x_n) diverge puisque si une suite converge, toute suite extraite de cette suite converge vers la même limite.
b. On peut par exemple proposer la suite : $(x_n) = ((-1)^n)$:
• elle admet deux valeurs d'adhérence distinctes qui sont 1 et -1 (limites des suites extraites d'indices pairs ou impairs),
• la suite diverge puisque $(x_{n+1} - x_n)$ ne tend pas vers 0 (en valeur absolue, elle est constante égale à 2).

61. a. La suite (u_n) est comprise dans l'intervalle [m,M].
Posons : $v_0 = u_0$, $a_0 = m$, $b_0 = M$.
Considérons alors les deux segments [m, $\frac{m+M}{2}$] et [$\frac{m+M}{2}$,M].
L'un au moins des deux segments contient une infinité de termes de la suite.
On retient cet intervalle (et si c'est le cas des deux, on retient le segment inférieur).
On pose alors a_1 et b_1 les extrémités de ce segment et v_1 un terme de la suite (u_n) dont le numéro est strictement supérieur à 0.
Ensuite, si on suppose a_0, …, a_n, b_0, …, b_n, et v_0, …, v_n construits de telle sorte que :
• $\forall\ 0 \le k \le n - 1$, $a_k \le a_{k+1}$, $b_{k+1} \le b_k$, $b_k - a_k = \frac{M - m}{2^k}$,
• $\forall\ 0 \le k \le n$, $v_k \in [a_k, b_k]$,

- $[a_n,b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u.
- la suite $v_0, \ldots, v_n$ est formée de termes de la suite u dont les numéros sont strictement croissants.

Alors on peut, en reprenant le principe exposé pour le rang 1, construire v_{n+1} pour continuer la suite.
Ainsi la suite (v_n) est extraite de la suite (u_n) et :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq v_n \leq b_n$.

Comme les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, la suite (v_n) converge vers leur limite commune.
On a ainsi extrait une suite convergente de (u_n).

b. Si une suite complexe (z_n) est bornée, ses suites parties réelle et imaginaire (notées (a_n) et (b_n)) sont aussi bornées.
On peut ainsi extraire une suite $(a_{\varphi(n)})$ de (a_n) qui soit convergente.
Mais alors la suite $(b_{\varphi(n)})$ est toujours réelle et bornée donc il est possible d'en extraire une suite $(b_{\varphi(\psi(n))})$ convergente.
La suite $(a_{\varphi(\psi(n))})$, extraite de $(a_{\varphi(n)})$ est encore convergente et finalement, la suite $(z_{\varphi(\psi(n))})$ est extraite de (z_n), et puisque ses parties réelle et imaginaire convergent, elle est donc aussi convergente.