

Révisions d'analyse (corrigé des indispensables).

Limites des fonctions de variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. a. La fonction f est le produit d'une fonction bornée sur \mathbb{R} ($x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$) et d'une fonction qui tend vers 0 en 0 ($x \mapsto x^2$), donc f admet pour limite 0 en 0 (conséquence du théorème des gendarmes).
On peut donc prolonger f en 0 en posant : $f(0) = 0$.
- b. En $+\infty$ apparaît une forme indéterminée $(\infty, 0)$.
Mais un équivalent en $+\infty$ donne : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2 \cdot \frac{1}{x} = x$, et f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Continuité des fonctions de variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , fonctions lipschitziennes.

2. Soit n un entier relatif.
Sur l'intervalle ouvert $]n, n+1[$, la partie entière est constante donc la fonction est de la forme :
 $x \mapsto n + \sqrt{x - n}$.
Par opérations sur les fonctions continues sur $]n, n+1[$, f y est continue.
Etudions maintenant la continuité en : $n \in \mathbb{Z}$.
Sur $]n - 1, n[$, f vaut : $f(x) = n - 1 + \sqrt{x - (n - 1)}$, et f tend vers n en n par valeurs inférieures.
Sur $]n, n+1[$, f vaut : $f(x) = n + \sqrt{x - n}$, et f tend vers n en n par valeurs supérieures.
La fonction f est donc continue en n .
 f est finalement continue sur \mathbb{R} .
3. Il suffit d'étudier la fonction intermédiaire g définie par : $\forall x \in [0, 1], g(x) = f(x) - x$.
Cette fonction g est continue sur $[0, 1]$ par opérations.
De plus : $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$, car : $f(0) \in [0, 1]$, et : $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, pour les mêmes raisons.
Le théorème des valeurs intermédiaires garantit donc que g s'annule sur $[0, 1]$ donc que f y admet un point fixe.
4. La même démarche que précédemment donne le même résultat.
En effet, pour la même fonction : $g(0) = f(0) - 0 = 1 \geq 0$, $g(1) = f(1) - 1 = -1 \leq 0$, et g s'annule encore.
5. • On peut indiquer que sinus est dérivable sur \mathbb{R} , et : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$, d'où le résultat (en utilisant le théorème des accroissements finis).
• On peut aussi écrire que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + y}{2}\right)$, et :
- $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin(x) - \sin(y)| = 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \right| \leq 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x - y}{2} \right| = |x - y|,$$
- en utilisant la propriété : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, |\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$.
6. On commence par remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| = |u_{n+1} - 0| = |f(u_n) - f(0)| \leq k \cdot |u_n - 0| = k \cdot |u_n|$.
On en déduit par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq k^n \cdot |u_0|$,
et le théorème des gendarmes montre alors que (u_n) tend vers 0, puisque la suite majorante tend elle-même vers 0.
7. a. On peut réécrire l'hypothèse faite sur f en : $\forall x \neq 0, \left| \frac{f(x)}{x} \right| < 1$.

b. Pour : $0 < a < b$, posons alors : $g(x) = \left| \frac{f(x)}{x} \right|$.

Cette fonction g est continue (par opérations) sur $[a, b]$ donc est bornée sur ce segment et en particulier et majorée sur $[a, b]$, y admet une borne supérieure qui est atteinte en une valeur c de $[a, b]$.
Autrement dit : $\forall x \in [a, b], 0 \leq g(x) \leq g(c) < 1$, vu le résultat de la question a.

Donc en posant : $k = g(c)$, on a : $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq k \cdot |x|$.

Cette valeur k répond au problème puisque : $0 \leq k < 1$, sauf si : $k = 0$.

Mais dans ce dernier cas, il suffit de remplacer k par $\frac{1}{2}$, et on obtient le résultat avec cette nouvelle valeur.

Dérivabilité des fonctions de variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

8. Notons f et g ces deux fonctions.

- f est continue sur \mathbb{R}^* par opérations.

De plus, comme produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0 en 0, f tend vers 0 en 0, et comme $f(0)$ est nulle, f est donc aussi continue en 0, donc finalement sur \mathbb{R} .

Deuxièmement, f est dérivable sur \mathbb{R}^* pour des raisons similaires, et sa dérivée f' est continue sur \mathbb{R}^* .

Enfin le taux d'accroissement de f en 0 vaut : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, et ce taux

d'accroissement n'a pas de limite en 0 puisque \sin n'a pas de limite en $\pm\infty$.

f n'est donc pas dérivable en 0.

- g est continue sur \mathbb{R} , et de classe C^1 sur \mathbb{R}^* pour les mêmes raisons.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = 2 \cdot x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'autre part, le taux d'accroissement de g en 0 vaut : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{g(x) - f(0)}{x - 0} = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, et ce taux

d'accroissement tend vers 0 en 0 (voir f).

Donc g est dérivable en 0 et : $g'(0) = 0$.

Enfin, g' n'a pas de limite en 0 (du fait du cosinus) donc g' n'est pas continue en 0.

Finalement, g n'est que dérivable sur \mathbb{R} , C^1 sur \mathbb{R}^* .

9. a. Notons f , g et h les trois fonctions proposées.

Par opérations, elles sont de classe C^1 sur \mathbb{R} .

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}},$$

$$g'(x) = \frac{ch(x)}{1 + sh^2(x)} = \frac{ch(x)}{ch^2(x)} = \frac{1}{ch(x)} = \frac{2 \cdot e^x}{1 + e^{2x}},$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - th^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + th^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ch(x)}.$$

b. On travaille sur \mathbb{R} (qui est un intervalle) et : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2 \cdot f'(x)$, et : $h'(x) = f'(x)$.

Donc : $\exists (C, C') \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2 \cdot f(x) + C, h(x) = f(x) + C'$.

En évaluant ces égalités en 0, on en déduit que : $C = -\frac{\pi}{2}, C' = -\frac{\pi}{4}$.

10. Soit : $n \in \mathbb{N}$, fixé.

On va travailler par récurrence sur k , pour : $0 \leq k \leq n$.

- Tout d'abord, f est continue sur \mathbb{R} (soit de classe C^k , avec : $k = 0$).

En effet, f est continue sur \mathbb{R}^{++} et \mathbb{R}^* (comme polynômes) et : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n+1} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

Donc f est continue sur \mathbb{R} .

Supposons maintenant que f soit de classe C^k pour : $0 \leq k < n$, et :

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, f^{(k)}(x) = (n+1) \cdot n \dots (n-k+2) \cdot x^{n+1-k}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(k)}(x) = 0$.

Alors $f^{(k)}$ est dérivable (et même de classe C^1) sur \mathbb{R}^{++} et \mathbb{R}^* comme polynômes.

De plus : $\forall x > 0, f^{(k+1)}(x) = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) \cdot x^{n-k}$, et évidemment $f^{(k+1)}$ est nulle sur \mathbb{R}^* .

On constate alors que $f^{(k+1)}$ tend vers 0 en 0 par valeurs inférieures, de même par valeurs supérieures, puisque : $n - k > 0$.
 Donc $f^{(k)}$ est dérivable en 0, $(f^{(k)})'(0) = f^{(k+1)}(0) = 0$, et $f^{(k+1)}$ est continue en 0 (théorème de prolongement C^1).
 La fonction f est donc de classe C^{k+1} sur \mathbb{R} , ce qui achève la récurrence.
 f est donc bien de classe C^n sur \mathbb{R} .

Développements limités.

11. • Le premier développement est élémentaire :

$$\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x}\right) = \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \text{ en } 0,$$

mais on peut aussi travailler soit avec une différence de ln, soit avec dérivation, développement puis intégration, soit en développant d'abord dans le ln : je vous laisse juger de la méthode la plus efficace.

• Puis : $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, en 0, avec un développement composé en notant

que le terme suivant dans le développement du ln est bien un $o(x^3)$ en 0.

On aurait également pu commencer par dériver, développer, puis intégrer le développement.

• On commence par un changement de variable et on pose : $x = 1+h$.

On peut ensuite écrire : $\frac{x-1}{\ln(x)} = \frac{h}{\ln(1+h)} = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)}$, pour h au voisinage de 0.

A l'aide d'une composition de développement, et avec celui de $\frac{1}{1+u}$, en 0, on obtient :

$$\frac{x-1}{\ln(x)} = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} + o(h^2), \text{ pour au } h \text{ voisinage de } 0.$$

• On commence par transformer et :

$$x \cdot \ln(x+1) - (x+1) \cdot \ln(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln(x) = -\ln(x) + x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

puis on développe $\ln(1+u)$ à l'ordre 3 en 0, ce qui donne :

$$x \cdot \ln(x+1) - (x+1) \cdot \ln(x) = -\ln(x) + x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = -\ln(x) + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \text{ en } +\infty.$$

• On commence là encore par transformer et :

$$\text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \text{ en } +\infty \text{ (puisque : } x > 0).$$

12. On commence par remarquer que : $\forall n \geq 1, 0 < \frac{1}{n} \leq 1$, et : $0 < n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\text{Donc : } \left(n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \cdot \ln\left(n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(n^2 \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{6} + o(1)\right), \text{ en } +\infty, \text{ et}$$

comme $o(1)$ est une fonction qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite tend vers $\exp\left(-\frac{1}{6}\right)$ en utilisant la continuité de l'exponentielle.

13. a. Sur \mathbb{R}^{+*} , la fonction tend vers $+\infty$ en 0 (où sa courbe présente une asymptote verticale) et en $+\infty$ en $+\infty$ ce qui correspond à une deuxième branche infinie pour sa courbe.

$$\text{c. Puis : } \forall x > 0, f(x) = (x+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puisque $[f(x) - (x+2)]$ tend vers 0 en $+\infty$, la droite d'équation : $y = x + 2$, est asymptote à la courbe.

De plus, puisque : $[f(x) - (x+2)] \sim \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$, et que cet équivalent est positif, $[f(x) - (x+2)]$ est à partir

d'une certaine valeur, du même signe que cet équivalent, donc positif, et la courbe est au voisinage de l'infini au-dessus de cette asymptote.

Suites explicites, réelles ou complexes.

14. • Pour la première suite (décroissante minorée donc convergente), on peut simplement dire que (2^n) tend vers $+\infty$ donc que la suite tend vers 0.

• La deuxième peut être vue comme la somme de deux suites qui tendent vers 0 ou dire que : $v_n \sim \frac{1}{n^2}$.

• Pour la troisième, le plus simple est d'écrire :

$$n^3 + 1 \sim_{+\infty} n \cdot (n-1) \cdot (n-2), \text{ et : } \forall n \geq 3, \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n!} = \frac{1}{(n-3)!}, \text{ donc : } w_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(n-3)!}, \text{ et } (w_n) \text{ tend vers } 0.$$

• Pour la quatrième, on peut invoquer le théorème des croissances comparées et dire que la factorielle l'emporte sur la suite (a^n) dans tous les cas, donc que la suite tend vers 0.

On peut aussi dire que, pour : $a = 0$, (u_n) est la suite constante nulle et que pour : $a \neq 0$, on a :

$$\forall n \geq 0, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|a|}{\sqrt{n+1}}, \text{ donc ce quotient devient inférieur à } 1 \text{ à partir d'un certain rang.}$$

Autrement dit, la suite $(|u_n|)$ est décroissante à partir d'un certain rang, minorée par 0 donc convergente.

Enfin, si on note sa limite L, alors : $\forall n \geq 0, |u_{n+1}| = \frac{|a|}{\sqrt{n+1}} \cdot |u_n|$, d'où à la limite : $L = 0 \cdot L = 0$.

• Pour cette dernière suite, on peut remarquer que : $\forall 1 \leq k, \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

$$\text{Donc : } \forall n \geq 1, v_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ et } (v_n) \text{ tend vers } 1.$$

15. a. λ est solution du problème si et seulement si : $(1-a) \cdot \lambda = b$, qui admet bien une unique solution puisque : $a \neq 1$.

$$\text{Cette solution vaut : } \lambda = \frac{b}{1-a}.$$

b. Si on pose comme proposé la suite (v_n) , alors par différence : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = a \cdot v_n$, et (v_n) est bien une suite géométrique.

c. On en déduit que (v_n) converge si et seulement si : $|a| < 1$ (puisque par hypothèse : $a \neq 1$).

Or (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge, donc (u_n) converge si et seulement si : $|a| < 1$.

Enfin, si (v_n) converge elle converge vers 0.

$$\text{Conclusion : } (u_n) \text{ converge si et seulement si : } |a| < 1, \text{ et dans ce cas : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda = \frac{b}{1-a}.$$

Suites récurrentes linéaires, ou définies à partir de : $u_{n+1} = f(u_n)$.

16. • On commence par dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et est positif, donc la suite est bien définie.

On peut aussi faire intervenir la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ : $x \mapsto \sqrt{1+x}$, dite fonction itératrice de cette suite récurrente, et puisque : $u_0 = 2 \in \mathbb{R}^+$, et que \mathbb{R}^+ est stable par f , la suite est bien définie.

• f étant croissante sur \mathbb{R}^+ , la suite est monotone, et comme : $u_1 = \sqrt{3} < 2 = u_0$, (u_n) est décroissante.

Si on ne connaît pas ce résultat, on remarque que : $u_1 < u_0$, et par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.

En effet, ce résultat est vrai pour : $n = 0$, et si on le suppose vrai pour un entier n donné, alors en appliquant f (qui est croissante), on obtient : $f(u_{n+1}) = u_{n+2} \leq f(u_n) = u_{n+1}$, d'où le résultat.

• la suite étant décroissante et positive (c'est-à-dire minorée), elle converge vers une limite L.

• enfin, la fonction f étant continue sur \mathbb{R}^+ , en particulier en L, on passe à la limite dans l'égalité définissant (u_n) et on obtient : $L = f(L)$.

Si maintenant, on résout l'équation : $L = \sqrt{1+L}$, (avec : $L \geq 0$), elle est équivalente à : $L^2 - L - 1 = 0$, et on

$$\text{conclut que : } L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ c'est-à-dire le nombre d'or } \phi.$$

Remarques :

• on aurait pu illustrer cette suite par sa représentation graphique.

• puisque : $u_n = \sqrt{1+u_{n-1}} = \sqrt{1+\sqrt{1+u_{n-2}}} = \dots = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots+\sqrt{1+u_0}}}}$, cette écriture conduit au
 « résultat » classique : $\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}$.

17. Cette suite est une suite récurrente linéaire à deux termes.

On sait (cours de sup) que les suites réelles vérifiant cette relation de récurrence particulière forment un espace vectoriel réel de dimension 2.

Pour en trouver une base, on résout l'équation caractéristique associée : $r^2 = r + 1$, et comme cette

équation a deux racines réelles r_1 et r_2 , valant : $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, une base est formée des suites (r_1^n) et (r_2^n) .

Autrement dit, la suite de Fibonacci est telle que : $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n) = A.(r_1^n) + B.(r_2^n)$.

Pour trouver A et B, on utilise les valeurs de u_0 et u_1 , ce qui conduit au système :

$$1 = A + B$$

$$1 = A.r_1 + B.r_2.$$

On obtient donc : $A = \frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1}$, et : $B = \frac{r_1 - 1}{r_1 - r_2}$, soit : $(u_n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$.

On traite le cas général proposé en modifiant la valeur des constantes A et B.