

1. On propose une solution stationnaire sous la forme $\Psi(x, t) = \phi(x).e^{\frac{-iE}{\hbar}t}$ L'équation de Shrödinger donne l'équation

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2.m.(E - V(x))}{\hbar^2}\phi = 0$$

✓ Pour $x < 0$, $\frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2\phi = 0$ donc $\phi(x) = A.e^{ikx} + B.e^{-ikx}$ ou $\Psi(x, t) = A.e^{i(kx - \frac{E}{\hbar}t)} + B.e^{i(-kx - \frac{E}{\hbar}t)}$

✓ Pour $x > 0$, $\frac{d^2\phi}{dx^2} + K^2\phi = 0$ car $E > V_0$ donc $\phi(x) = C.e^{ikx} + D.e^{-ikx}$ ou $\Psi(x, t) = C.e^{i(Kx - \frac{E}{\hbar}t)} + D.e^{i(-Kx - \frac{E}{\hbar}t)}$

2. On reconnait les formes des ondes progressives

✓ dans le sens croissant $\Psi_i(x, t) = A.e^{i(kx - \frac{E}{\hbar}t)}$ où on pose $A = \Psi_0$ donc $\Psi_i(x, t) = \psi_0.e^{i(kx - \frac{E}{\hbar}t)}$

✓ dans le sens décroissant $\Psi_r(x, t) = B.e^{i(-kx - \frac{E}{\hbar}t)}$ où on pose $B = r.\Psi_0$ donc $\Psi_r(x, t) = r.\psi_0.e^{i(-kx - \frac{E}{\hbar}t)}$

✓ Dans le domaine $x > 0$, l'onde ne peut que se propager dans le sens croissant, donc $D = 0$. On pose $C = \tau.\Psi_0$, alors $\Psi_t(x, t) = \tau.\psi_0.e^{i(Kx - \frac{E}{\hbar}t)}$

3. On exploite la continuité de $\phi(x)$ et $\frac{d\phi(x)}{dx}$ à l'interface $x = 0$, ce qui donne
$$\begin{cases} 1 + r = \tau \\ k.(1 - r) = K.\tau \end{cases}, \text{ ce qui amène à } : \tau = \frac{2.k}{k + K}$$

et $r = \frac{k - K}{k + K}$

4. On a pour $x < 0$ la densité de probabilité $\rho = \left| \Psi_0^2 (e^{ikx} + r.e^{-ikx})^2 . e^{\frac{-2.iE}{\hbar}t} \right| = \Psi_0^2 . [1 + r^2 + r.(e^{2ikx} + e^{-2ikx})]$

Donc $\rho = 1 + r^2 + 2.r.\cos(2kx)$

On obtient donc une densité de probabilité maximum si $2kx = 0$ (2π) et minimum si $2kx = \pi$ (2π), correspondant à des phénomènes d'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie.

5. Dans le cadre de la mécanique classique, la probabilité de transmission de la particule aurait été égale à 1.