1. Propagation dans le vide $\Longrightarrow$ Equation d'Alembert vérifiée par $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$. On en déduit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$

2. $v_\varphi = \frac{\omega}{Re(\underline{k})} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}$ et de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi}$.

3. L'onde n'est pas plane, on reprend donc l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, ce qui amène à

$$\vec{B} = E_0.\frac{n\pi}{a.\omega}.cos\left(\frac{\pi z}{a}\right).sin(\omega t - kx).\vec{u_x} + \frac{k}{\omega}.E_0.sin\left(\frac{\pi z}{a}\right).cos(\omega t - kx).\vec{u_z}$$

4. On effectue un bilan énergétique

- $u_{em} = \frac{\epsilon_0.E^2}{2} + \frac{B^2}{2.\mu_0}$ On utilise les expressions des champs pour obtenir la valeur moyenne

$$\langle u_{em}\rangle = \frac{\epsilon_0.E_0^2}{4}.sin^2\frac{\pi z}{a} + \frac{E_0^2}{4.\mu_0}\left(\frac{\pi}{a.\omega}\right)^2.cos^2\frac{\pi z}{a} + \frac{E_0^2}{4.\mu_0}\left(\frac{k}{\omega}\right)^2.sin^2\frac{\pi z}{a}$$

Grâce à la relation de dispersion, on peut réduire l'expression à

$$\langle u_{em}\rangle = \frac{\epsilon_0.E_0^2}{4}\left[1 + \left(\frac{k.c}{\omega}\right)^2.\left(sin^2\frac{\pi z}{a} - cos^2\frac{\pi z}{a}\right)\right]$$

On en déduit l'énergie localisée dans un parallélépipède tel que $0 < x < l$, $0 < y < L$ et $0 < z < a$:

$$\langle U_{em}\rangle = \int_0^a \langle u_{em}\rangle .l.L.dz = \frac{\epsilon_0.E_0^2}{4}.a.l.L$$

D'autre part, le vecteur de Poynting s'écrit $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ ce qui donne

$$\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \frac{E_0^2}{2.\mu_0}\frac{k}{\omega}.sin^2\frac{\pi z}{a}.\vec{u_x}$$

Le flux à travers la surface dans le plan $x = Cte$ est alors

$$\Phi = \int_0^a \left\langle\vec{\Pi}\right\rangle .Ldz\vec{u_x} = \frac{E_0^2}{2.\mu_0}\frac{k}{\omega}.L.\frac{a}{2}$$

Or la vitesse v_e de l'énergie est telle que l'énergie traversant cette surface S pendant une durée dt était localisée dans l'espace de section S et de longueur $v_e.dt$ initialement

$$\langle U_{em}\rangle .v_e.dt = \Phi.dt$$

On retrouve alors

$$v_e = v_g$$

.