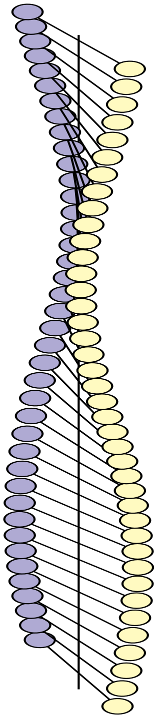

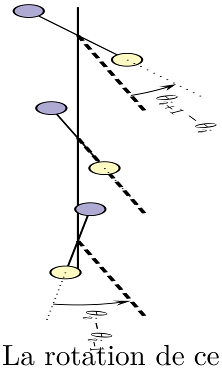

On notera $J_\Delta = \dfrac{1604}{15}.m.a^2$ le moment d'inertie d'un module par rapport à l'axe des câbles.
Une échelle de perroquet est constituée de barreaux de masse m et de longueur $8.a$ auxquels on accroche à chaque extrémité deux boules de rayon a et de masse $2.m$ (l'ensemble constituant un module).
le barreau i est repéré par sa position angulaire θ_i
Ces barreaux sont reliés entre eux par un câble de longueur h.
La rotation de ce câble à ses deux extrémités d'un angle α par rapport à sa position d'équilibre crée un couple de forces de rappel de moment, en valeur absolue

$$\Gamma = C.\left|\alpha\right| \text{ avec } C > 0$$

Ce couple tend à ramener le câble dans sa position initiale.
Chaque barreau peut osciller dans le plan horizontal.

1. Appliquer le Théorème de Moment Cinétique au barreau i et en déduire une relation entre $\ddot{\theta}_i$, θ_{i+1}, θ_i et θ_{i-1}.

   Vous exprimerez notamment les couples de rappel exercés par les câbles reliant le barreau i aux barreaux $i-1$ et $i+1$, en vérifiant la cohérence de vos résultats à partir de cas particuliers.

2. En choisissant comme notation $\theta_i = \theta(z)$, que deviennent les expressions θ_{i-1} et θ_{i+1}.

3. On considère $h \ll a$. On peut alors assimiler h à dz.

   En effectuant des développements limités à l'ordre approprié, montrer que $\theta(z)$ est solution de l'équation différentielle du type

   $$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0$$

   Exprimer c. On considère désormais ce modèle correspondant à l'approximation des milieux continus.

4. Cette échelle est fixée à ses deux extrémités en $z = O$ et $z = H$. On propose alors une solution du type

   $$\theta(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0n}.cos(\omega_n.t + \psi).cos(k_n.x + \varphi)$$

   Exprimer k_n et relier ω_n à k_n.

5. On remplace l'une des extrémités par un petit oscillateur imposant au câble une rotation $\theta(0,t) = \theta_0.cos(\Omega t)$. En faisant varier Ω, on observe des résonances du système. Par exemple, pour $L = 2\ m$, $\Omega = 110\ rad.min^{-1}$, on observe 4 ventres d'oscillation de grande amplitude. Sachant que $a = 1\ cm$ et $m = 50\ g$, en déduire la valeur de C.