

$$1. J_{\Delta} \ddot{\theta}_i = C.(\theta_{i+1} - \theta_i) - C.(\theta_i - \theta_{i-1})$$

$$2. \text{Effectuer un développement limité à l'ordre 2 : avec } c = \sqrt{\frac{C.h^2}{J_{\Delta}}},$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

3. On exploite les conditions aux limites : $\theta(0, t) = \theta(H, t) = 0$ $\theta(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0n} \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \psi) \cdot \cos(\varphi) = 0$ ce qui impose $\cos(\varphi) = 0$. On peut choisir $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\theta(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0n} \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \psi) \cdot \sin(k_n \cdot H) = 0 \text{ ce qui impose } \sin(k_n \cdot H) = 0 \text{ soit } k_n = \frac{n \cdot \pi}{H}$$

L'équation d'Alembert permet d'en déduire $\omega_n = k_n \cdot c$

4. Considérons une boule de barycentre G et un point A sur l'axe de rotation de l'échelle de Perroquet, alors le théorème de Koenig donne

$$\vec{\sigma}_A = \vec{AG} \wedge (2.m) \cdot \vec{v}_G + \vec{\sigma}_G^*$$

Or la boule étant fixé à la barre, le vecteur rotation instantané de la boule dans le référentiel barycentrique est $\Omega = \dot{\theta} \vec{u}_z$ soit

$$\vec{\sigma}_{A,boule} = J_{boule} \cdot \dot{\theta} = 5.a(2.m) \cdot (5.a \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{u}_z + \frac{2}{5} \cdot (2.m) \cdot a^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z = 2.m.a^2 \cdot \frac{127}{5} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$$

Sachant qu'il y a deux boules et la barre, le moment d'inertie total est donc

$$J_{tot} = 4.m.a^2 \cdot \frac{127}{5} + \frac{1}{12} \cdot m \cdot (8a)^2 = \frac{1604}{15} \cdot m.a^2$$

5. L'existence de 4 ventres pour un régime libre correspond à $n = 4$, soit à la pulsation $\omega_4 = \frac{4 \cdot \pi}{H} \cdot c$

Le système excité à cette pulsation va entrer en résonance dans ce mode. On peut donc en déduire

$$c = \sqrt{\frac{C.h^2}{J_{\delta}} \frac{\Omega.H}{4.\pi}}$$

$$C.h^2 = \frac{\Omega^2 \cdot H^2}{16.\pi^2}$$

Ce qui donne $C.h^2 = 45,5 \cdot 10^{-6}$

Donc, si $h = 5 \text{ cm}$, on obtient $C = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ N.m.rad}^{-1}$