

1. Considérons un ressort de longueur L et de raideur K : $\vec{F} = \pm K \cdot \Delta L \vec{u}$

S'il correspond à une série de N ressorts de raideur k , à l'extrémité de chacun de ces ressorts : $\vec{f} = \pm K \cdot \Delta l \vec{u}$ avec

$$\begin{cases} f = F \\ \Delta l = \frac{\Delta L}{N} \end{cases}$$

Donc $\frac{1}{K} = \frac{N}{k}$

Or une tranche de longueur dx a une raideur k_{dx} avec $N = \frac{L}{dx}$ donc :

$$\boxed{k_{dx} = K \frac{L}{dx}}$$

2. $\Delta(dx) = (\xi(x + dx) - \xi(x)) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x) \cdot dx$

3. Donc, si on étudie une tranche dx du ressort, le pfd donne

$$\mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \underbrace{-K \frac{L}{dx} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}(x) \cdot dx}_{\text{gauche} \rightarrow dx} + \underbrace{K \frac{L}{dx} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx) \cdot dx}_{\text{droite} \rightarrow dx}$$

$$\mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{L} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x) \right) = \frac{K}{L} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot dx$$

4. L'équation de propagation précédente donne

$$g(x) = A \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + \varphi$$

La condition aux limites $x = 0$ donne $g(x) = A \cdot \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)$

La condition en $x = L$ est obtenue en appliquant le pfd à la masse m . On se rappelle que la force de rappel s'écrit

$$\vec{f} = \pm k_{dx} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \vec{u}_x = \pm K \cdot L \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ donc, en } x = L :$$

$$m \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -K \cdot L \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$m \cdot (-\omega^2) \sin \frac{\omega}{c} \cdot \sin \omega t = -K \cdot L \cdot \left(-\frac{\omega L}{c}\right) \cos \frac{\omega L}{c} \cdot \sin \omega t$$

$$m \cdot (-\omega^2) \sin \frac{\omega L}{c} = -K \cdot L \cdot \left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos \frac{\omega}{c}$$

$$m \cdot \omega \cdot \frac{\omega L}{c} \frac{c}{\omega L} \tan \frac{\omega L}{c} = -\frac{K \cdot L}{c}$$

D'où par simplification l'expression proposée.

Ce raisonnement reprend l'étude de la perturbation par une masse d'une corde vibrante...