1. $J_\Delta.\ddot{\theta}_i = C.(\theta_{i+1} - \theta_i) - C.(\theta_i - \theta_{i-1})$

2. Effectuer un développement limité à l'ordre 2 : avec $c = \sqrt{\dfrac{C.h^2}{J_\Delta}}$,

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0$$

3. On exploite les conditions aux limites : $\theta(0,t) = \theta(H,t) = 0$ $\theta(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\theta_{0n}.cos(\omega_n.t + \psi).cos(\varphi) = 0$ ce qui impose $cos(\varphi) = 0$. On peut choisir $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
$\theta(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\theta_{0n}.cos(\omega_n.t + \psi).sin(k_n.H) = 0$ ce qui impose $sin(k_n.H) = 0$ soit $k_n = \dfrac{n.\pi}{H}$
L'équation d'Alembert permet d'en déduire $\omega_n = k_n.c$

4. Considérons une boule de barycentre G et un point A sur l'axe de rotation de l'echelle de Perroquet, alors le théorème de Köenig donne

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AG} \wedge (2.m).\vec{v}_G + \vec{\sigma}^*_G$$

Or la boule étant fixé à la barre, le vecteur rotation instantané de la boule dans le référentiel barycentrique est $\Omega = \dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$ soit

$$\vec{\sigma}_{A,boule} = J_{boule}.\dot{\theta} = 5.a(2.m).(5.a.\dot{\theta}).\overrightarrow{u_z} + \frac{2}{5}.(2.m).a^2.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_z} = 2.m.a^2.\frac{127}{5}.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_z}$$

Sachant qu'il y a deux boules et la barre, le moment d'inertie total est donc

$$J_{tot} = 4.m.a^2.\frac{127}{5} + \frac{1}{12}.m.(8a)^2 = \frac{1604}{15}.m.a^2$$

5. L'existence de 4 ventres pour un régime libre correspond à $n = 4$, soit à la pulsation $\omega_4 = \dfrac{4.\pi}{H}.c$
Le système excité à cette pulsation va entrer en résonance dans ce mode. On peut donc en déduire

$$c = \sqrt{\frac{C.h^2}{J_\delta}}\frac{\Omega.H}{4.\pi}$$

$$C.h^2 = \frac{\Omega^2.H^2}{16.\pi^2}$$

Ce qui donne $C.h^2 = 45,5.10^{-6}$
Donc, si $h = 5\ cm$, on obtient $C = 1,8.10^{-4}\ N.m.rad^{-1}$