À l'équilibre, le champ des pressions en tout point $z < 0$ de l'océan est donné par la relation $p_e(M) = p_0 - \rho.g.z$ avec ρ la masse volumique de l'eau supposée incompressible.

On note à l'instant t le champ : $\left|\begin{array}{ll} \text{des vitesses :} & \vec{v}(M,t) = v_x(x,z,t).\vec{e_x} + v_z(x,z,t).\vec{e_z} \\ \text{des pressions :} & p(M,t) = p_e(M) + \tilde{p}(x,z,t) \end{array}\right.$

On considère une onde à la surface telle que la déformation de la surface libre s'écrive $\xi(x,t)$

On se limite aux perturbations sinusoïdales :

$\underline{\tilde{p}}(x,z,t) = f(z).e^{j(\omega t - kx)}$; $\underline{\vec{v}}(x,z,t) = \vec{v}(z).e^{j(\omega t - kx)}$ et $\underline{\xi}(x,z,t) = a.e^{j(\omega t - kx)}$

On considère la profondeur H suffisamment importante devant λ afin de négliger les ondes retour.

1. Rappeler l'expression de l'accélération particulaire. À quelle condition l'accélération convetive sera-t-elle négligeable devant l'accélération instantanée ?

   On supposera cette condition vérifiée par la suite

2. En utilisant l'équation d'Euler et l'équation différentielle de conservation de la masse, montrer que $\dfrac{d^2 f(z)}{dz^2} - \beta^2.f(z) = 0$ en définissant le paramètre β.

3. Montrer alors que l'on peut écrire $\tilde{p} = p_1.e^{kz}.cos(\omega t - kx)$, sans chercher à exprimer p_1.

4. En considérant $e^{k.a} \simeq 1$, montrer qu'une condition aux limites amène à $a = \dfrac{p_1}{\rho.g}$

5. Montrer que la composante verticale du champ des vitesses vaut $\underline{v}_z = \dfrac{-1}{j.\omega.\rho} h(z).e^{(j\omega t - kx)}$ et exprimer $h(z)$ en fonction de z, p_1 et k.

6. On admet que $\omega = (g.k)^{\alpha}$. Déterminer la valeur numérique de α.

7. Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe des ondes de gravité en fonction de g et du vecteur d ?onde k . Quelle est la relation simple qui relie la vitesse de phase à la vitesse de groupe ?