Un fluide de masse volumique $\rho$ et de viscosité dynamique $\eta$ s'écoule sur une épaisseur $h$ constante sur un plan incliné d'angle $\alpha$. L'écoulement est considéré comme incompressible. On le décrit par le champ des vitesses $\overrightarrow{v} = v(x,y).\overrightarrow{e_x}$. La pression atmosphérique est notée $p_0$.
On note $Oy$ la perpendiculaire ascendante au plan incliné, et $Ox$ l'axe colinéaire au plan de plus grande pente descendante.
L'écoulement vérifie l'équation de Navier-Stokes : $\rho.\dfrac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}p + \rho\overrightarrow{g} + \eta.\Delta\overrightarrow{v}$

1. Montrer que le champ des vitesses est indépendant de $x$
2. Montrer que le champ de pressions est de la forme $p(x,y) = -\rho.g.cos\alpha.y + f(x)$. En exploitant une condition à l'interface fluide/air, montrer que$p(x,y) = P_0 + \rho.g.(h-y).cos\alpha$.
3. En déduire l'expression de $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$. En déduire l'expression du champ des vitesses en exploitant les conditions aux limites pour l'écoulement.
4. Montrer que le débit volumique vaut, pour une largeur $L$ de l'écoulement, $D_v = \dfrac{\rho.g.sin\alpha}{3.\eta}.L.h^3$