

1. Écoulement stationnaire donc $v(x, z, t) = v(x, z)$.

Le fluide étant incompressible : $\text{div } \vec{v} = \vec{0} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ donc $v(x, z) = v(z)$

2. ✓ Le régime est permanent donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\checkmark (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial x} \right) v \cdot \vec{u}_x = \vec{0}$$

$$\checkmark \text{ On en déduit que } \vec{a} = \frac{D \vec{v}}{Dt} = \vec{0}$$

3. Navier-Stokes : $\vec{0} = \rho \cdot \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$ donc
$$\begin{cases} Ox : \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ Oz : \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g \end{cases}$$

4. L'intégration de la seconde équation permet d'obtenir

$$p(x, z) = -\rho \cdot g \cdot z + p(x, 0)$$

La pression évolue donc en fonction de z de 1 bar tous les 10 m. Si $a \ll 10$ m, on peut alors considérer $p(x)$.

5. On a alors $\frac{d^2 p(x)}{dx^2} = \eta \frac{d^2 v(z)}{dz^2} \forall (x, z)$. Cette égalité du type $f(x) = g(z)$ est donc nécessairement constante, d'où le gradient de pression constant.

6. $v(-a) = v(a) = 0$. $\eta \cdot v(z) = -\frac{1}{2} \cdot A \cdot z^2 + B \cdot z + C$. Les conditions aux limites donnent

$$v(z) = v_0 \cdot \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \quad p(x) = p_0 - \frac{2 \cdot \eta \cdot v_0}{a^2} \cdot x$$

7. Parabole.

$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = -\frac{v_0 \cdot z}{a^2} \cdot \vec{u}_y$. L'écoulement est donc tourbillonnaire (les forces de viscosité ont tendance à créer un moment des forces non nul... les lignes de champ sont pourtant rectilignes!!!!)