1. Les lignes de courant seront des cercles : $\overrightarrow{v} = v(r,\theta,z).\overrightarrow{e_\theta}$
Si on néglige l'effet de la pesanteur, alors $v(r,\theta,z) = v(r,\theta)$
Le liquide étant incompressible, l'écoulement sera incompressible : $\frac{1}{r}\frac{\partial(v_\theta}{\partial\theta} = 0$ soit $v(r,\theta) = v(r)$.

2. La dérivation particulaire s'écrit, en régime stationnaire : $\left(\begin{vmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}\right)\overrightarrow{v} = \left(v.\frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(v.\overrightarrow{e_\theta}\right) = \frac{v^2}{r}.\frac{\partial\overrightarrow{e_\theta}}{\partial\theta} = -\frac{v^2}{r}.\overrightarrow{e_r}$

L'équation de Navier et stokes donne : $\begin{vmatrix} -\rho.\frac{v^2}{r} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{vmatrix} + \eta.\begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}.\left(\frac{v}{r}\right) \\ 0 \end{vmatrix}$

Mais les symétries permettent de dire que p ne dépend que de r. Ainsi l'équation se réduit à :
$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}.\left(\frac{v}{r}\right) = 0$
Cette équation s'écrit également sous la forme : $\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = A$
La composante selon $\overrightarrow{e_r}$ de l'équation pourrait nous permettre de connaître l'évolution de $p(r)$, mais ceci n'est pas nécessaire dans cet exercice.

3. EDHA : $\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0$ avec comme solution : $v_{EDHA} = -\frac{B}{r}$
Pour la solution particulière, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante Solution particulière $v_{part} = -\frac{K(r)}{r}$, ce qui en réinjectant dans l'équation donne $K'(r) = -A.r$ donc $K(r) = \frac{-A.r^2}{2}$ amenant à la solution particulière $v_{part} = \frac{-A.r^2}{2}.\frac{-1}{r} = \frac{A.r}{2}$
On obtient alors la forme complète de la solution $\boxed{v(r) = -\frac{B}{r} + \frac{A.r}{2}}$

4. On doit vérifier que $\begin{vmatrix} v(a) = 0 = \frac{A.a}{2} - \frac{B}{a} \\ v(b) = b.\Omega = \frac{A.b}{2} - \frac{B}{b} \end{vmatrix}$
Soit $A = \frac{2.b^2.\Omega}{b^2 - a^2}$ et $B = \frac{a^2.A}{2}$

5. A l'interface en $r = b$ les forces surfaciques de viscosité ont pour expression
En un point P du cylindre : $d\Gamma_r = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\sigma}\right) \cdot \overrightarrow{e_z}.dS$
$d\Gamma_r = \pm r.\eta.r.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)dS$
Intégré sur toute la surface, cela donne :$\Gamma_r = \pm\eta.4.B.\pi.H = \pm\eta.4.\pi.H.\frac{a^2.b^2.\Omega}{b^2 - a^2}$

6. En régime permanent, le couple moteur doit compenser le couple résistif :
$\Gamma = \eta.4.B.\pi.H = \pm\eta.4.\pi.H.\frac{a^2.b^2.\Omega}{b^2 - a^2}$