On désire réaliser une transfusion sanguine à l'aide d'une poche de sang. On utilise pour cela un tuyau souple et suffisamment large pour qu'on puisse y négliger les phénomènes liés à la viscosité du sang. Au bout de ce tuyau, une aiguille horizontale assure le passage du sang vers la veine du patient allongé sur un lit. La surface libre du sang dans la poche est située à une hauteur H au dessus de l'aiguille, la pression qui règne sur cette surface est égale à la pression atmosphérique P_0. Dans l'aiguille les phénomènes visqueux et la perte de charge associée ne sont plus négligeables, l'aiguille est assimilée à une portion de cylindre de rayon intérieur $R = 0,10\ mm$, de longueur $L = 2,0\ cm$. Le sang utilisé dans la poche possède une viscosité dynamique d'environ $h = 1,6.10^{-3}\ SI$ et une masse volumique $\rho = 1,0\ kg.L^{-1}$. La pression dans la veine P_v est constante, elle est supérieure à la pression atmosphérique P_0 et on l'écrira $P_v = P_0 + \Delta P$ avec $\Delta P = 700\ Pa$.
L'intensité du champ de pesanteur, supposé uniforme, est notée g avec $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

1. On considère un fluide incompressible et stationnaire de viscosité dynamique η circulant entre l'entrée et la sortie d'un tuyau cylindrique de rayon R et de longueur L sous l'effet d'une différence de pression $P_e - P_s$ entre ses extrémités. On néglige les effets de la pesanteur. Montrer à l'aide de l'équation de Navier-Stokes que le débit volumique est donné par la relation
$$D_v = \frac{(P_e - P_s).\pi.R^4}{8.\eta.L}$$
2. Déterminer la pression P_A à l'entrée de l'aiguille sachant que le débit est très faible. L'exprimer en fonction de P_0, ρ, g, r et H.
3. On désire obtenir un débit volumique de sang transfusé $D_v = 40\ cm^3.h^{-1}$. A quelle hauteur H_0 faut-il placer l'extrémité libre de la poche de sang ?