On considère un écoulement incompressible, permanent et irrotationnel d'un fluide dans un dièdre d'angle α.
Le fluide est éjecté à une distance D de l'arrête du cube avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$, dirigée vers l'arrête. Les effets de bords seront négligés dans la direction perpendiculaire au plan de la figure.

1. Pourquoi peut-on définir un potentiel $\Phi(M,t)$ caractérisant l'écoulement ? Donner les composantes de la vitesse en fonction de Φ, dans la base $\mathfrak{B}\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\}$.
2. Quelle relation vérifie le potentiel $\Phi(M,t)$?

   On propose de chercher une solution sous la forme $\Phi(r,\theta) = f(r).g(\theta)$. On donne l'expression d'un Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

3. Déterminer les équations différentielles vérifiées par $f(r)$ d'une part et par $g(\theta)$ d'autre part. (*On pourra définir une constante* K).
4. Préciser les conditions aux limites et en déduire des conditions sur $g'(0)$ et $g'(\alpha)$. Montrer qu cela impose le signe de la constante K.
5. En déduire, en le justifiant, que $g(\theta) = \lambda.cos\dfrac{\pi.\theta}{\alpha}$.
6. Montrer que $f(r) = \lambda.r^\beta$ est solution de l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$. Exprimer β.
7. Déterminer l'expression de la constante λ
8. Exprimer le champ des vitesses.