1. Car l'écoulement est irrotationnel. On a alors $\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\Phi) = \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{cases}$

2. $\begin{cases} irrotationnel \rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{grad}(\Phi) \\ incompressible \rightarrow div\vec{v} = 0 \end{cases}$ donc $\Delta\Phi(M,t) = 0$

On propose de chercher une solution sous la forme $\Phi(r,\theta) = f(r).g(\theta)$. On donne l'expression d'un Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

3. ici

$$\frac{\partial}{\partial r}(r.dpart\Phi r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r.f'.g\right) = r.f''.g + f'.g$$

$$\Delta\Phi = f''.g + \frac{f'.g}{r} + \frac{1}{r^2}.f.g'' = 0$$

$$\frac{1}{f}.\left(r.f' + r^2.f''\right) = -\frac{g''}{g} = K$$

4. $\left(\vec{v}.\vec{u_\theta}\right)_{(\forall r\theta=0)} = \left(\vec{v}.\vec{u_\theta}\right)_{(\forall r,\theta=\alpha)} = 0$. Or $\left(\vec{v}.\vec{u_\theta}\right) = \dfrac{1}{r}.f.g'$ donc $g'(0) = g'(\alpha) = 0$.
Seule la forme sinusoïdale de la solution de l'ED peut permettre de vérifier ces conditions initiales, donc $K > 0$. Alors $g'' + K.g = 0$ admet comme solution $g(\theta) = \lambda.cos(k.\theta) + \mu.sin(k.\theta)$ avec $k = \sqrt{K}$.

5. $\begin{cases} g'(0) = 0 \longrightarrow \mu = 0 \\ g'(\alpha) = 0 \longrightarrow sin(k.\alpha) = 0 \longrightarrow k = n.\dfrac{\pi}{\alpha}\ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$. Donc $g(\theta) = \lambda.cos\dfrac{n.\pi.\theta}{\alpha}$.
La seule valeur physiquement acceptable est $n = 1$ car dans le cas contraire on aurait pour $0 < \theta < \alpha$ la fonction $g'(\theta) = 0$, ce qui voudrait dire que la composante radiale de la vitesse serait nulle en ces points. Ce résultat est incohérent. Par conséquent

$$g(\theta) = \lambda.cos\frac{\pi.\theta}{\alpha}$$

6. On considère $f(r) = \lambda.r^\beta$ dans l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$. On obtient alors $\beta^2 = \left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)^2$ soit $\beta = \dfrac{\pi}{\alpha}$.

7. Le potentiel des vitesses, à une constante près est donc

$$\Phi = \lambda.r^{\frac{\pi}{\alpha}}.cos\frac{\pi.\theta}{\alpha}$$

On utilise alors la condition en $(r = D, \theta = 0)$ où $\vec{v}.\vec{u_r} = -V_0$ ce qui donne $\lambda = \dfrac{-V_0}{D^{\frac{\pi}{\alpha}-1}}$

8. $\vec{v} = \dfrac{\partial\phi}{\partial r}.\vec{u_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}.\vec{u_\theta}$ donne

$$\vec{v} = \frac{-V_0}{D^{\frac{\pi}{\alpha}-1}}.r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\left(cos\frac{\pi.\theta}{\alpha}.\vec{u_r} - sin\frac{\pi.\theta}{\alpha}.\overrightarrow{u_{theta}}\right)$$