

1. On étudie le système supposé ponctuel  $M$  dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

✓ Bilan des forces : Le poids  $\vec{P}$ , la réaction normale au support  $\vec{R}$  et la force de rappel  $\vec{T}$ .

*Il est inutile de projeter ces forces puisque l'on effectue un bilan énergétique.*

✓ Énergie potentielle associée aux forces :

Le Poids dérive de  $E_{pes} = m.g.h = m.g.a.\sin\theta$

La force de rappel dérive de  $E_{el} = \frac{1}{2}.k.\Delta l^2 = \frac{1}{2}.k.\left(2.a.\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$  un peu de trigo ici...

La réaction ne travaille pas

Le système est donc conservatif, d'énergie potentielle totale :

$$E_p = m.g.a.\sin\theta + 2.k.a^2.\cos^2\frac{\theta}{2}$$

2. Pour un système conservatif, la position d'équilibre correspondra à un extrémum de l'énergie potentielle :

$$\left(\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{eq} = 0, \text{ soit :}$$

$$m.g.a.\cos\theta_{eq} + 2.k.a^2.2.\frac{1}{2}.(-\sin\frac{\theta_{eq}}{2})\cos^2\frac{\theta_{eq}}{2} = 0 \text{ ou } m.g.a.\cos\theta_{eq} - k.a^2.\sin\theta_{eq} = 0$$

On obtient donc les positions d'équilibre telles que  $\tan\theta_{eq} = \frac{mg}{ka}$

3. L'énergie potentielle doit alors être minimum, ce qui se traduit mathématiquement par  $\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{eq} > 0$ .

$$\text{Or } \left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{eq} = -m.g.a.\sin\theta_{eq} - k.a^2.\cos\theta_{eq}$$

À l'équilibre, on a obtenu  $\tan\theta_{eq} > 0$ ,  $\sin\theta_{eq}$  et  $\cos\theta_{eq}$  sont donc de même signe. L'équilibre sera donc stable pour la position telle que  $0 < \theta_{eq} < \frac{\pi}{2}$