

- On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}'(O, OX', OY', OZ)$  dans lequel le cerceau est fixe.

On a alors  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$

Attention, ici  $\omega \neq \dot{\theta}$  car  $\dot{\theta}$  désigne ici la vitesse angulaire de rotation du cerceau par rapport au cercle et non celle du cercle dans le référentiel du laboratoire.

- On peut partie sur une étude énergétique du système dans ce référentiel :

- Le poids dérive d'une énergie potentielle  $E_{pes} = m \cdot g \cdot h = -m \cdot g \cdot a \cdot \cos\theta$

- La force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{ie} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{HM}$  avec  $dE_{el} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{HM} \cdot d\vec{OM}$

Donc  $dE_{el} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{HM} \cdot (d\vec{OH} + d\vec{HM}) = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{HM} \cdot d\vec{HM}$

Soit  $E_{el} = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot HM^2$

- La force d'inertie de Coriolis ainsi que la réaction, orthogonales à la trajectoire de  $M$  ne travaillent pas.

On a donc  $E_{pot} = -m \cdot g \cdot a \cdot \cos\theta - \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot (a \cdot \sin\theta)^2$

- L'équilibre de ce système conservatif est caractérisé par  $\frac{dE_{pot}}{d\theta} = 0$ , ce qui donne :

$$m \cdot g \cdot a \cdot \sin\theta - m \cdot a^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = 0 \text{ d'où } \begin{cases} \sin\theta = 0 : & \theta_1 = 0 & \theta_2 = \pi \\ \cos\theta_3 = \frac{g}{a \cdot \omega^2} & \text{ssi } \omega > \sqrt{\frac{g}{a}} \end{cases}$$

- Pour la stabilité de ces positions, il faut étudier le signe de  $\left(\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right)_{(eq)}$  :

$$\left(\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right) = \cos\theta \cdot (m \cdot g \cdot a - m \cdot a^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos\theta) + \sin\theta \cdot (m \cdot a^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin\theta)$$

- $\left(\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right)_{\theta_1} = m \cdot g \cdot a - m \cdot a^2 \cdot \omega^2 > 0$  ssi  $\omega < \sqrt{\frac{g}{a}}$

- $\left(\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right)_{\theta_3} = m \cdot a^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2\theta > 0$

On peut donc déduire