1 Résolution numérique d'une équation différentielle

1.1 Équation différentielle

On considère un pendule pesant constitué d'une barre rigide homogène de longueur L et de masse m, lié en O à l'axe Δ horizontal par une liaison pivot idéale.

On donne le moment d'inertie de la barre en O : $J = \dfrac{m.L^2}{12}$

On considère la barre faisant un angle θ_0 avec la verticale à l'instant initial. On la lâche sans vitesse initiale. On considère $0 < \theta_0 < \pi$.

- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ
- Déterminer l'expression de la période dans le cas de petites oscillations, notée T_0

1.2 Principe de résolution numérique de l'équation

On souhaite obtenir, par application de la méthode d'Euler, un ensemble de N valeurs de l'angle θ sur une durée totale $Ttot = 10 * T_0$. Ces valeurs seront consignées dans une liste que l'on pourra noter *theta* et les instants correspondants dans une liste t.

- Exprimer le pas p, durée entre deux valeurs consignées dans la liste.
- Évaluer par la méthode d'Euler $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)(t_k)$ en fonction de $theta[k+1]$, $theta[k]$ et p.
- Évaluer par la méthode d'Euler $\left(\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\right)(t_k)$ en fonction de $theta[k+2]$, $theta[k+1]$, $theta[k]$ et p.
- En déduire grâce à l'équation différentielle une relation de récurrence donnant $theta[k+2]$ en fonction de $theta[k+1]$ et $theta[k]$.

2 Programmation

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

global g,L,pas,T,w

g=9.8
L=1
N=5000
w=sqrt(g/L)
T=2*3.14/w
pas=5*T/N
```

2.1 résolution numérique

Proposer une fonction admettant comme arguments les conditions initiales et retournant la liste des valeurs de θ.

2.2 Recherche d'un maximum local

Proposer une fonction $maxi_local$ admettant comme argument la liste *theta* et retournant une liste des instants correspondant aux maxima locaux pour $\theta(t)$.

2.3 Période du signal

Proposer une fonction *periode* admettant comme argument la liste des instants correspondant aux maxima locaux et renvoyant la valeur $\dfrac{T}{T_0}$ avec T la période.

2.4 Isochronisme

Il y a isochronisme des oscillations si la période est indépendante des conditions initiales.

- Représenter la courbe $T = f(\theta 0)$ calculée sur 20 valeurs de $\theta 0$ comprises entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. Commenter
- Déterminer la valeur limite de l'angle initial tel que $\dfrac{T}{T_0} < 1,05$