

1. Par analogie entre les forces gravitationnelle et électrostatique, on peut remarquer que  $-G \Leftrightarrow \frac{1}{4.\pi.\epsilon_0}$ , ce qui amène à la forme gravitationnelle du théorème de Gauss :

$$\iint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4.\pi.G.M_{int}$$

2. La distribution étant à symétrie sphérique,  $\vec{G} = \mathcal{G}(r).\vec{e}_r$ . On choisit donc une sphère comme surface de Gauss.

$$\forall r, \iint \vec{G} \cdot d\vec{S} = 4.\pi.r^2.\mathcal{G}(r)$$

✓ Pour  $r < R$  :  $M_{int} = \rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3 = m_T.\frac{r^3}{R^3}$  donc  $\mathcal{G}(r) = -G.\frac{m_T.r}{R^3}$

✓ Pour  $r \geq R$  :  $M_{int} = m_T$  donc  $\mathcal{G}(r) = -G.\frac{m_T}{r^2}$

3. On en déduit le potentiel  $V$  tel que  $\vec{G} = -\vec{grad}V$ , soit

✓ Pour  $r \geq R$  :  $\int_{V(r)}^0 dV = G.m_T.\int_r^\infty \frac{dr}{r^2}$  donc  $V(r) = \frac{-G.m_T}{r}$

✓ Pour  $r < R$  :  $\int_{V(R)}^{V(r)} dV = \frac{m_T.G}{R^3} \int_R^r .r.dr$  avec  $V(R) = \frac{-G.m_T}{R}$  (par continuité du potentiel.

$$\text{donc } V(r) = \frac{-G.m_T}{R} + \frac{m_T.G}{2.R^3} \cdot (r^2 - R^2) = -\frac{m_T.G}{2.R^3} \cdot (r^2 - 3.R^2)$$

4.  $\mathcal{E}_p(r) = \iiint \rho.V.d\tau$

On choisit comme volume élémentaire dans lequel  $V(r)$  peut être considéré comme uniforme le volume compris entre deux sphères de rayons  $r$  et  $r + dr$  :  $d\tau = 4.\pi.r^2.dr$

$$\text{Alors } \mathcal{E}_p(r) = -\rho.\frac{m_R.G}{2.R^3} \cdot \int_0^r (r^2 - 3.R^2) \cdot 4.\pi.r^2.dr = \rho.\frac{6.m_T^2.G}{5.R}$$