

1. $\rho = \frac{3.Q}{4.\pi.a^3}$

2. Vu de l'extérieur, une boule uniformément chargée crée le même champ qu'une charge ponctuelle portant la charge totale de la boule $q = \rho.\frac{4}{3}.\pi.R^3 = \frac{Q.R^3}{a^3}$, soit :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q.R^3}{\epsilon_0.r^2.a^3}.\vec{e}_r, \text{ on en déduit le potentiel } V(M) = \frac{Q.R^3}{\epsilon_0.r.a^3}$$

3. La couronne dR a un volume $d\tau \equiv 4.\pi.R^2.dR$ et porte donc une charge $\delta q = \rho.d\tau = \frac{Q}{4.\pi.a^3}.4.\pi.R^2.dR = \frac{3.Q.R^2}{a^3}.dR$

L'énergie potentielle associée à ces charges était nulle à l'infini, elle est égale à $\delta q.V(R)$ lorsqu'elle sont placées à la surface du noyau. On a donc $d\mathcal{E} = \frac{3.Q.R^2}{a^3}.dR.\frac{Q.R^3}{\epsilon_0.R.a^3} = \frac{3.Q^2.R^4}{\epsilon_0.a^6}.dR$

4. Le noyau, pour être totalement constitué, nécessite donc une énergie :

$$\mathcal{E} = \int_0^a d\mathcal{E} = \frac{3.Q^2}{\epsilon_0.a^6} \int_0^a R^4.dR = \frac{3.Q^2}{\epsilon_0.a^6} \left[\frac{R^5}{5} \right]_0^a$$

$$\text{Soit } \mathcal{E} = \frac{3.Q^2}{5.\epsilon_0.a}$$

5. La stabilité du noyau doit correspondre à un minimum de son énergie potentielle. Or le minimum sera obtenu ici pour $a \rightarrow \infty$. Il est donc nécessaire de considérer d'autres interaction afin de justifier la stabilité du noyau. Les interactions gravitationnelles ne peuvent permettre de justifier cette stabilité.