Réseaux linéaires en régime sinusoïdal

Eric Ouvrard

PC CPGE Lycée Dupuy de Lôme - LORIENT

1er septembre 2020

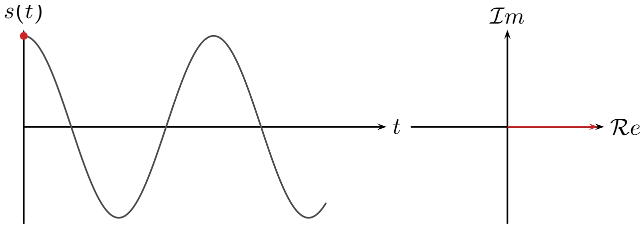
Représentation complexe

On peut associer à une grandeur sinusoïdale $s(t)$ sa représentation complexe $\underline{s}(t)$ telle que $s(t) = \mathcal{R}e(\underline{s}(t))$

$$s(t) = S_0.cos\left(\omega t + \varphi\right) \longrightarrow \underline{s}(t) = S_0.e^{j(\omega t+\varphi)}$$

On peut définir l'amplitude complexe $\underline{S}$ telle que

$$\underline{s}(t) = \underline{S}.e^{j(\omega t)} \ \texttt{alors} \ \underline{S} = S_0.e^{j.\varphi}$$



Relation linéaire

Deux grandeurs sont reliées par une relation linéaire si elles sont reliées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Utilisation des représentations complexes

La représentation complexe peut être utilisée dans toute relation linéaire. Alors

✍ $$\frac{d^n \underline{s}}{dt^n} = (j.\omega)^n . \underline{s}$$

Opérations linéaires	Opérations non linéaires
$z(t) = a.x(t) + b.y(t)$ $i = C.\frac{du}{dt}$	$\mathcal{P} = u.i$ $E_c = \frac{1}{2}.m.v^2$

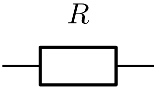
- On considère $u(t)$ et $i(t)$ deux signaux sinusoïdaux de même pulsation. Montrer que le passage à la représentation complexe est possible pour résoudre $i = C.\frac{du}{dt}$ mais est in-envisageable pour la résolution de $\mathcal{P} = u.i$
- $s(t) = S_0.cos\left(\omega t - k.x\right)$. Proposer l'écriture complexe associée et exprimer $\frac{d\underline{s}(t)}{dx}$ ainsi que $\frac{d\underline{s}(t)}{dt}$

Impédance d'un dipôle linéaire

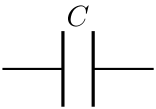
Pour un dipôle étudié en convention récepteur, les représentations complexes de la tension à ses bornes et l'intensité le traversant sont reliées par la loi :

$$\underline{u} = \underline{Z}.\underline{i}$$

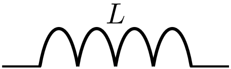
où $\underline{Z}$ est l'impédance complexe de ce dipôle.



$$\underline{Z}_R = R$$



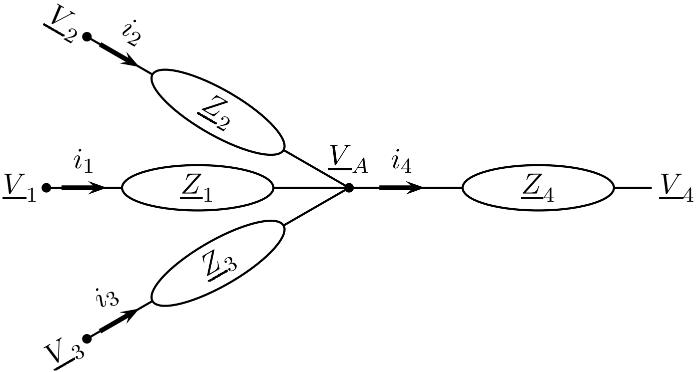
$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j.C.\omega}$$



$$\underline{Z}_L = j.L.\omega$$

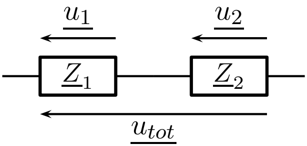
Toutes les relations linéaires définies sur les grandeurs réelles pour les résistances sont applicables en représentation complexe en exploitant les impédances.

Loi des nœuds en terme de potentiel



$$\frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_A}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_2 - \underline{V}_A}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_3 - \underline{V}_A}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{V}_A - \underline{V}_4}{\underline{Z}_4}$$

Pont diviseur de tension

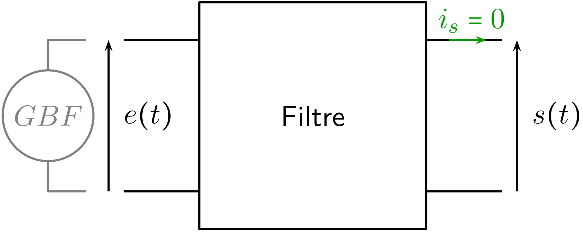


$$\underline{u_1} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.\underline{u_{tot}}$$

Une relation obtenue sur les représentations complexes permet d'en déduire l'équation différentielle reliant les grandeurs réelles.

$$j.\omega.\underline{u} + \frac{1}{\tau}.\underline{u} = \frac{1}{\tau}.\underline{e} \longrightarrow \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}.u = \frac{1}{\tau}.e$$

Un impose un signal d'entrée $e(t)$ à un quadripôle et l'on observe le signal $s(t)$. Le quadripôle est étudié "à vide", c'est-à-dire que le courant débité en sortie est nul.



L'objectif est de déterminer l'effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal en fonction de la pulsation ω de ce signal

Fonction de transfert

On note $e(t) = E.cos\omega t$ le signal d'entrée et $s(t) = S.cos\left(\omega t + \varphi\right)$ le signal en sortie du filtre. On peut alors définir la fonction de transfert

$$\underline{H}_{(\omega)} = G_{(\omega)}.e^{j\cdot\varphi} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

où $G_{(\omega)}$ correspond au gain et φ à l'avance de la tension de sortie sur la tension d'entrée.
Pour la représentation dans le diagramme de Bode, on définit le gain en décibel que l'on représente en fonction de $log\omega$

$$G_{dB} = 20.logH_{(\omega)}$$

On peut considérer qu'un signal est filtré si le gain devient suffisamment faible devant le gain maximum pouvant être obtenu avec ce filtre

Il s'agit d'un filtre dont la forme canonique est du type

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j.Q.\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

ω_0 est nommée **pulsation de résonance**. Il s'agit en effet de la pulsation pour laquelle on obtient le gain maximum.

Bande passante et Facteur de qualité

Un filtre passe-bande comporte deux fréquences de coupure. On définit la bande passante $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$

Le facteur de qualité Q du filtre traduit sa capacité à sélectionner une gamme étroite de fréquence

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$