Outils mathématiques

Analyse de Fourier

E. Ouvrard

PC CPGE Lycée Dupuy de Lôme - LORIENT

19 septembre 2017

1. Cas des signaux périodiques
   - Mesures associées
   - Décomposition en série de Fourier
     - Termes à connaitre
     - Du modèle mathématique à l'étude physique
     - Spectre

2. Cas des signaux non périodiques : Transformée de Fourier
   - Transformée de Fourier
   - Étendue temporelle/spectrale
     - Quelques exemples

Signal périodique

Un signal $s(t)$ est périodique s'il se reproduit identiquement à lui-même au bout d'une durée T, nommée période, indéfiniment.

Période : T en secondes   Fréquence : $f = \dfrac{1}{T}$ en s^{-1} ou en Hertz (Hz)

Pulsation : $\omega = \dfrac{2.\pi}{T}$ en $rad.s^{-1}$

Valeur moyenne :

$$\heartsuit \qquad \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}.\int_0^T s(t).dt$$

Valeur efficace :

$$\heartsuit \qquad S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$$

Valeur efficace de la composante alternative :

$$\heartsuit \qquad S_{eff(ac)} = \sqrt{\left\langle (s(t) - \langle s(t) \rangle)^2 \right\rangle}$$

Décomposition en série de Fourier

Toute fonction $s(t)$ périodique, de période $T = \dfrac{1}{f_0}$ peut s'écrire sous la forme

$$\heartsuit \qquad s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n.cos(2.\pi.n.f_0.t) + b_n.sin(2.\pi.n.f_0.t)\right)$$

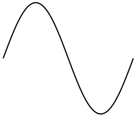
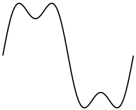
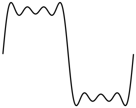
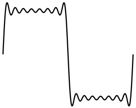
Avec n entier

- $S_0 = \langle s(t) \rangle$
- Forme alternative : $s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.cos(n.\omega_0.t + \varphi_n)$

- Tout signal périodique peut donc être vu comme une somme de signaux sinusoïdaux dont le signal de fréquence f_0 est nommé **fondamental** et les signaux de fréquence $n.f_0$ les **harmoniques** de rang n.
- La connaissance de l'amplitude de l'ensemble des harmoniques fournit le **spectre** du signal.

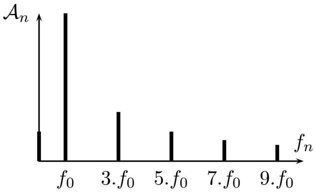
En théorie, la somme des signaux sinusoïdaux est infinie. En pratique, la connaissance des premières harmoniques (une dizaine) permet de bien décrire le signal.

Voici en exemple la décomposition en série de Fourier s'un signal créneau

$n_{Max} = 1$	$n_{Max} = 3$	$n_{Max} = 7$	$n_{Max} = 15$
			

Spectre en amplitude

C'est la représentation des amplitudes de chacune des composantes fréquentielles de rang n en fonction de la fréquence $n.f_0$ de cette harmonique, ainsi que de la composante continue



Théorème de Parseval

Pour un signal périodique décomposable en série de Fourier :

♡ - ✍ $$S_{eff}^2 = S_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n,eff}^2$$

$f(t)$ est un signal temporel non nécessairement périodique.

$f(t)$ périodique	$f(t)$ non périodique
$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} .A_n.cos\left(n.\omega.t + \varphi_n\right)$	$f(t) = \int_0^{\infty} .dA(\omega).cos\left(\omega.t + \varphi(\omega)\right)$

Transformée de Fourier

Pour une fonction $f(t)$ non périodique dans le domaine temporel, la transformée de Fourier $F(\omega)$ est du type :

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-i\omega t}.dt$$

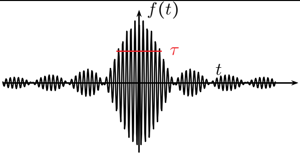
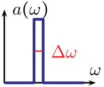
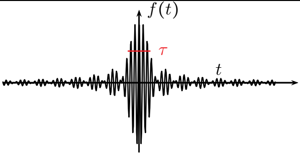
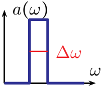
On a de même une relation entre ces deux grandeurs, nommée transformée de Fourier inverse :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega).e^{i\omega t}.d\omega$$

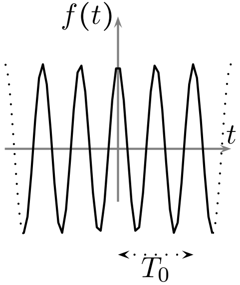
Largeurs spectrale et temporelle

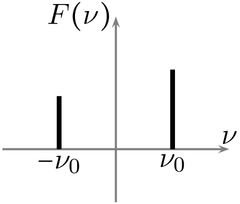
Pour un signal temporel d'une durée d'existence τ, la largeur spectrale associée $\Delta\omega$ est telle que

$$\heartsuit \qquad \Delta\omega.\tau \equiv 2.\pi$$

Étendue temporelle	Étendue spectrale
	
	

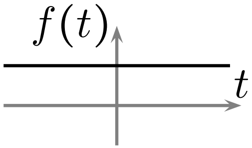
$$f(t) = f_0.cos\left(\frac{2.\pi.t}{T} + \varphi\right)$$

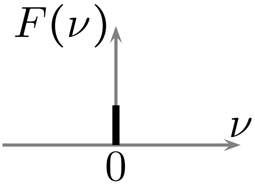




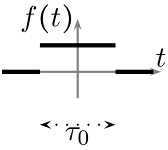
Avec $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$

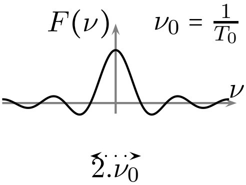
$$f(t) = f_0$$



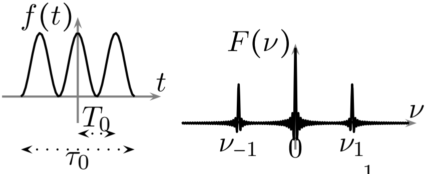


$$f(t) = \left| \begin{array}{ll} -\dfrac{\tau_0}{2} < t < \dfrac{\tau_0}{2} : & f_0 \\ |t| > \dfrac{\tau_0}{2} : & 0 \end{array} \right.$$



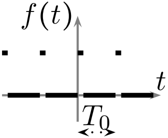


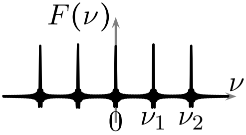
$$f(t) = \begin{vmatrix} t < \left|\frac{\tau_0}{2}\right| : & f_0 . \left[1 + cos\left(\frac{2.\pi.t}{T} + \varphi\right)\right] \\ |t| > \frac{\tau}{2} : & 0 \end{vmatrix}$$



$$\nu_1 = -\nu_{-1} = \frac{1}{T_0}$$

$$f(t) = f(t+T) = \left| \begin{array}{ll} t < \tau_0 : & f_0 \\ \tau_0 < t < T & 0 \end{array} \right.$$





$$\nu_i = \frac{i}{T_0}$$