Dynamique des fluides

PC Lycée Dupuy de Lôme

- L'écoulement est étudié dans le référentiel galiléen : $\overrightarrow{f_v} = \mu.\overrightarrow{g}$
- L'écoulement est laminaire : $\mathcal{R}e < 100$

Bilan des forces pour une particule de fluide de volume $d\tau$ et de masse dm :

- Poids : $d\overrightarrow{F}_{pes} = dm.\overrightarrow{g}$
- Viscosité : $\overrightarrow{dF_{visc}} = \eta.\Delta\overrightarrow{v}.d\tau$
- Forces de pression : $\overrightarrow{dF_{pres}} = -\overrightarrow{grad}p.d\tau$

Équation de Navier-Stokes

Pour un écoulement d'un fluide Newtonien dans un référentiel galiléen

$$✍ \qquad \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{g} + \frac{1}{\mu}.\left(\eta.\overrightarrow{v} - \overrightarrow{grad}p\right)$$

Écoulement parfait

Un écoulement est considéré comme parfait s'il n'engendre pas de création d'entropie.
En considérant de plus l'évolution d'une particule de fluide adiabatique, l'écoulement est alors isentropique

La viscosité, conséquence de frottements entre particules de fluide, est négligée

Énergie potentielle massique

Une force conservative massique $\overrightarrow{f_m} = \dfrac{d\overrightarrow{F}}{dm}$ dérive d'une énergie potentielle massique

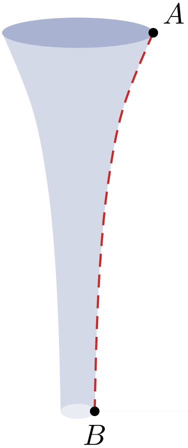
$$\overrightarrow{f_m} = -\overrightarrow{grad}e_m$$

Pour un écoulement parfait, toutes les forces appliquées à la particule de fluide sont conservatives.

Énergie potentielle massique

la force massique de pesanteur $\overrightarrow{g}$ dérive d'une énergie potentielle

$$e_m = g.z$$



Forme intégrale

La forme intégrale de l'équation d'Euler peut s'appliquer

- le long d'une ligne de courant
- entre deux points quelconques si l'écoulement est irrotationnel

$$\int_A^B \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}.\overrightarrow{dl} + \left[g.z + \frac{v^2}{2}\right]_A^B + \int_A^B \frac{\overrightarrow{grad}\,(p)}{\mu}.\overrightarrow{dl} = 0$$

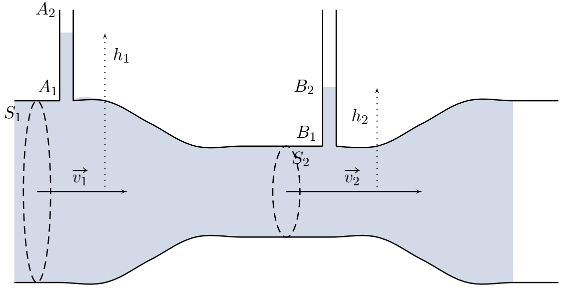
Rappel : $\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{v}$

La forme intégrale de l'équation d'Euler peut correspondre à une relation simple sous certaines conditions.
On retiendra cette relation

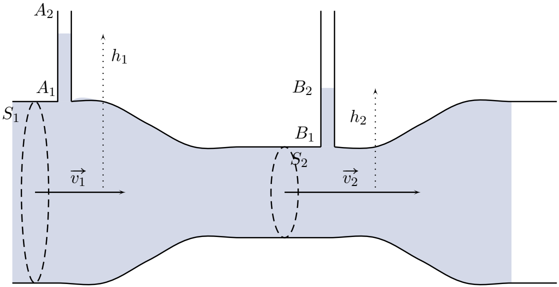
Relation de Bernoulli

Pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène, dans le référentiel galiléen

$$\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{p}{\mu} = C^{te}$$

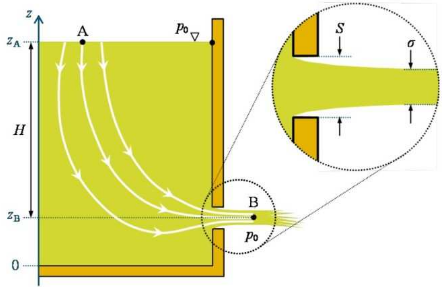


Montrer que ce système permet la mesure de v_1



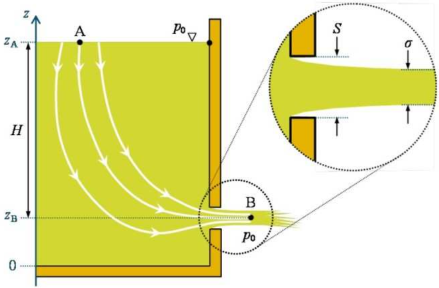
Montrer que ce système permet la mesure de v_1

$$v_1 = \sqrt{\frac{2.g.(h_1 - h_2)}{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}$$



Un réservoir est muni d'un robinet et rempli d'un liquide incompressible. On suppose que la section du robinet s et très petite devant la section S du réservoir.

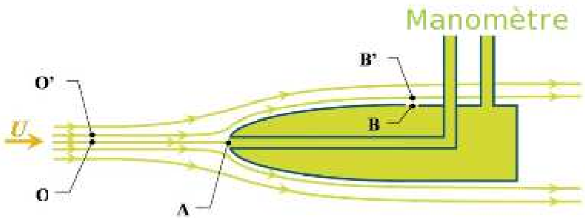
On arrive après étude à la relation suivante :



Un réservoir est muni d'un robinet et rempli d'un liquide incompressible. On suppose que la section du robinet s et très petite devant la section S du réservoir.

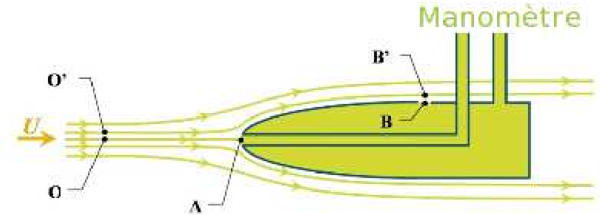
On arrive après étude à la relation suivante :

$$v_B \equiv \sqrt{2.g.h}$$



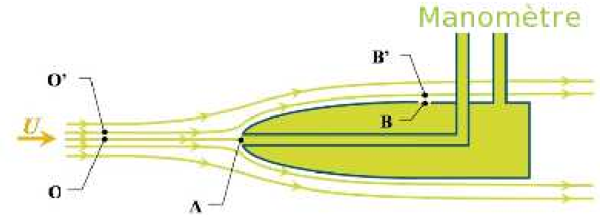
Pour l'air en écoulement :

- Pression en A :
- Pression en B :



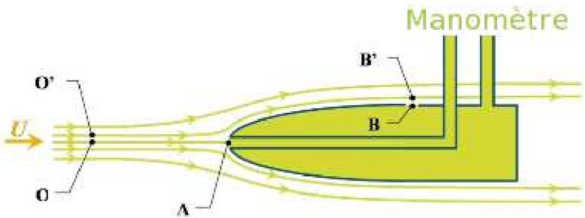
Pour l'air en écoulement :

- Pression en A : $\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{p_0}{\mu_{air}} = \dfrac{0}{2} + \dfrac{p_A}{\mu_{air}}$
- Pression en B :



Pour l'air en écoulement :

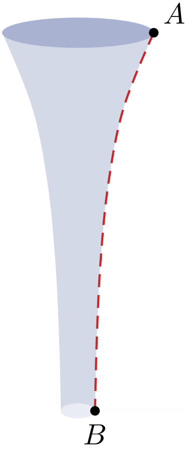
- Pression en A : $p_A = p_0 + \dfrac{\mu_{air}.u^2}{2}$
- Pression en B :



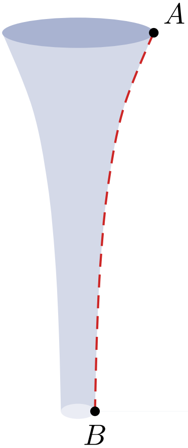
Pour l'air en écoulement :

- Pression en A : $p_A = p_0 + \dfrac{\mu_{air}.u^2}{2}$
- Pression en B : $p_B \equiv p_0$

✍ $$u = \sqrt{\frac{2.\left(p_A - p_B\right)}{\mu_{air}}}$$



Justifier que la section du jet d'eau diminue au fur et à mesure de l'écoulement.



Justifier que la section du jet d'eau diminue au fur et à mesure de l'écoulement.

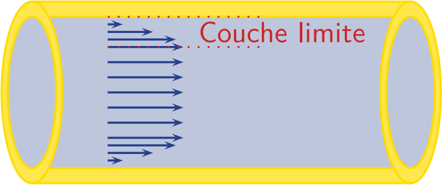
- L'écoulement étant incompressible (le liquide est incompressible), on aura conservation du débit : $v_e.S_e = v_s.S_s$
- On peut appliquer la relation de Bernoulli en deux points d'une ligne de courant où la pression est partout la même :
$v_s = \sqrt{v_e^2 + g.\left(h_e - h_s\right)} > v_s$

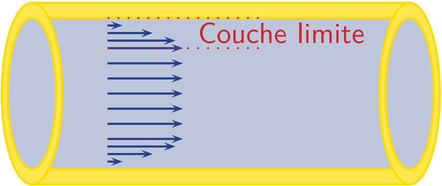
✍ $S_s < S_e$

Couche limite

Il existe toujours une épaisseur au niveau du fluide en écoulement le long d'un solide à une vitesse U où les phénomènes de viscosités ne peuvent être négligés.
Cette couche limite a une épaisseur que l'on pourra évaluer grâce à la relation

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}}$$



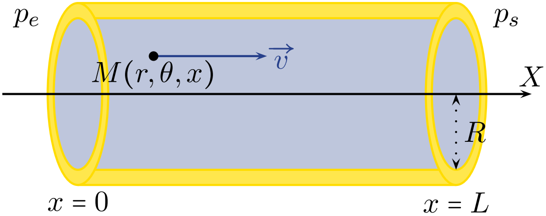


hypothèse d'un écoulement parfait

L'écoulement pourra être considéré comme parfait si la couche limite a une dimension très faibles devant les dimensions caractéristiques de l'écoulement.

Écoulement Poiseuille

Pour des viscosités importantes, on doit considérer les forces de viscosité qui entraineront des pertes de charges.

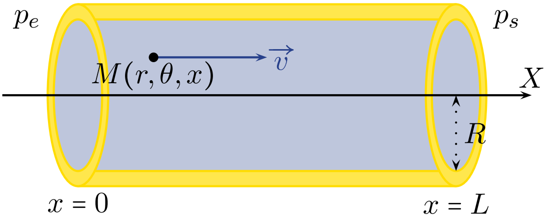


On cherche les solutions stationnaires $\overrightarrow{v}=v(r,x).\overrightarrow{e_x}$

- Montrer que $v(r,x)=v(x)$
- Montrer que l'accélération convective est nulle
- Appliquer l'équation de Navier-Stokes, en déduire que $p(r,x)=p(x)$ et déterminer $p(x)$
- Justifier que $\left(\dfrac{dv}{dr}\right)(r=0)=0$. Déterminer $v(r)$

Écoulement Poiseuille

Pour des viscosités importantes, on doit considérer les forces de viscosité qui entraineront des pertes de charges.



Dans la base cylindrique :

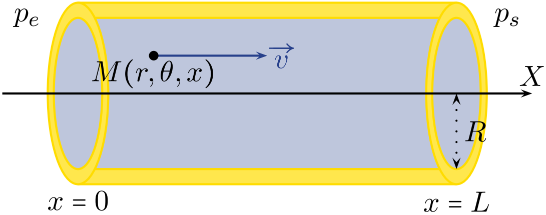
$$\overrightarrow{grad}U = \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

$$div\,\vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r.a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\Delta\left(v(x).\vec{e_x}\right) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)\vec{e_x}$$

Écoulement Poiseuille

Pour des viscosités importantes, on doit considérer les forces de viscosité qui entraineront des pertes de charges.



✍ $$v = \frac{p_e - p_s}{4.\pi.L}\left(R^2 - r^2\right).\vec{e_x} \quad \texttt{et} \quad p = p_e - (p_e - p_s).\frac{x}{L}$$

Résistance hydraulique

Il y a nécessité d'imposer un gradient de pression afin d'obtenir un débit volumique.

$$R_H = \frac{p_e - p_s}{D_v}$$

A partir des résultats précédents, on trouve

$$R_H = \frac{8.\eta.L}{\pi.R^4}$$

Circuit hydraulique

L'étude d'un circuit hydraulique peut se faire par modélisation et associations de résistances avec les lois analogues à celles de l'électrocinétique.