PC Lycée Dupuy de Lôme

La trajectoire d'un point est une notion qui dépend d'un observateur. On passe donc d'un repère à un référentiel en ajoutant cette notion d'observateur (muni d'une horloge).

Définir un référentiel

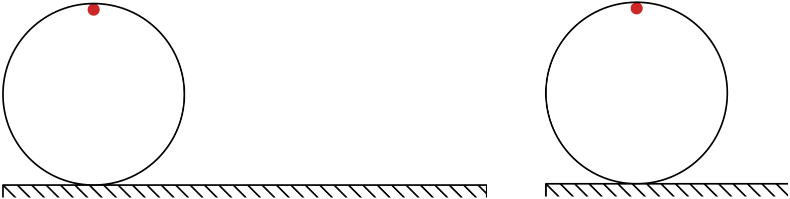
Un référentiel doit se définir par

- Une origine O
- Trois directions orthogonales caractérisées par trois axes orientés
- Une horloge

L'origine et le système d'axes constituent un repère.

base de projection

Le choix d'une base de projection est à priori indépendant du référentiel. Si les directions données par les vecteurs unitaires de la base ne sont pas fixes par rapport aux axes du référentiel, la base sera dite mobile dans ce référentiel.



choix du référentiel

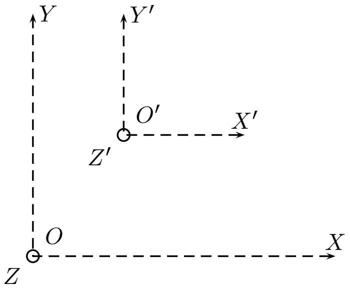
On choisit un référentiel en fonction de la facilité à décrire la trajectoire du point étudié dans ce référentiel.

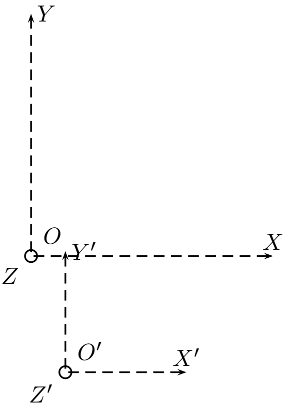
Cependant, on verra que les études dynamiques des systèmes ne peuvent se faire que dans une classe bien particulière de référentiels : les référentiels galiléen.

On doit être capable d'étudier un système dans un référentiel et d'écrire ses grandeurs cinématiques dans un autre référentiel.

On va travailler avec deux référentiels

- $\mathcal{R}(O, OX, OY, OZ)$ et la base fixe dans $\mathcal{R}$: $B(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$
- $\mathcal{R}'(O', O'X, O'Y, O'Z)$ et la base fixe dans $\mathcal{R}'$: $B'(\overrightarrow{u'_x}, \overrightarrow{u'_y}, \overrightarrow{u'_z})$





Référentiels en translation

Deux référentiels sont dits en translation si les axes liés aux référentiel $\mathcal{R}'$ ont des directions fixes vues du référentiel $\mathcal{R}$.
Selon le type de trajectoire de O' dans $\mathcal{R}$, une translation pourra être qualifiée de :

- Rectiligne si O' a un mouvement de translation dans $\mathcal{R}$
- Circulaire si O' a un mouvement de rotation dans $\mathcal{R}$

Référentiels en rotation autour d'un axe fixe

Deux référentiels sont dits en rotation autour d'un axe Δ fixe si $\mathcal{R}'$ ont des directions fixes vues du référentiel $\mathcal{R}$

- Leurs origines sont commune
- L'axe Δ est de direction fixe dans les deux référentiels.

On notera le plus souvent OZ l'axe Δ de rotation et $\theta = (OX, OX')$ l'angle de rotation.

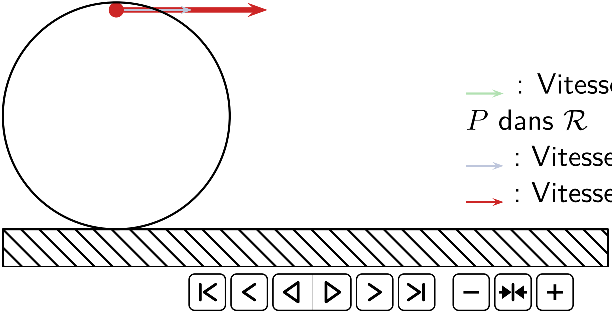
Vecteur rotation instantanée

Dans le cas d'une rotation uniforme de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ autour de OZ avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$,

$$\overrightarrow{\Omega} = \omega.\overrightarrow{u_z}$$

Si les deux référentiels sont en rotation, alors un vecteur de direction fixe pour l'observateur lié à $\mathcal{R}'$ pourra être de direction mobile pour l'observateur lié à $\mathcal{R}$. Cela se traduit mathématiquement par les relations

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{u'_x}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{u'_y} \qquad \left(\frac{d\overrightarrow{u'_y}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{u'_x}}$$



$\longrightarrow$: Vitesse du point coïncident P dans $\mathcal{R}$

$\longrightarrow$: Vitesse de la valve dans $\mathcal{R}'$

$\longrightarrow$: Vitesse de M dans $\mathcal{R}$

Point coïncident

P sera le point coïncident au point M à l'instant t, alors

- P est confondu au point M à l'instant t
- P est immobile dans $\mathcal{R}'$

On nomme vitesse d'entrainement la vitesse du point coïncident dans $\mathcal{R}$

Le point coïncident étant considéré immobile à l'instant t dans le référentiel $\mathcal{R}'$, sa vitesse dans $\mathcal{R}$ est imposée par la translation de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$.
Or si on imagine le référentiel $\mathcal{R}'$ comme un solide, tous les points de ce solide auront dans $\mathcal{R}$ la même vitesse

Vitesse d'entrainement pour $\mathcal{R}'$ en translation

La vitesse d'entrainement correspond à la vitesse de l'origine du référentiel mobile.

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v}(O', \mathcal{R})$$

Le point coïncident étant considéré immobile à l'instant t dans le référentiel $\mathcal{R}'$, sa vitesse dans $\mathcal{R}$ est imposée par la rotation de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$. Or si on imagine le référentiel $\mathcal{R}'$ comme un solide, tous les points de ce solide auront dans $\mathcal{R}$ une trajectoire circulaire.

Vitesse d'entrainement pour $\mathcal{R}'$ en rotation

Pour une rotation du référentiel caractérisée par le vecteur rotation instantané $\overrightarrow{\Omega} = \Omega.\overrightarrow{e_\Delta}$:

- On travaille dans la base cylindrique $B\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\Delta}\right)$.
- On nomme H le projeté orthogonal du point coïncident $P \equiv M$ sur Δ

$$\overrightarrow{v_e} = HM.\Omega.\overrightarrow{e_\theta}$$

Définition des accélérations

- $\overrightarrow{a_a}$ l'accélération absolue, ou accélération de M dans $\mathcal{R}$
- $\overrightarrow{a_r}$ l'accélération relative, ou accélération de M dans $\mathcal{R}'$
- $\overrightarrow{a_e}$ l'accélération d'entrainement, ou accélération du point coïncident P dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a}\,(P,\mathcal{R})$

- Par définition $\overrightarrow{a}\,(M,\mathcal{R}) = \left(\dfrac{d\overrightarrow{v}\,(M,\mathcal{R})}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$
- D'après la loi de composition des vitesses : $\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}_r + \overrightarrow{v}_e$
- Donc $\overrightarrow{a}\,(M,\mathcal{R}) = \left(\dfrac{d\overrightarrow{v}\,(M,\mathcal{R}')}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \left(\dfrac{d\overrightarrow{v_e}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$

- Dans ce cas particulier, une base fixe dans un référentiel le sera également dans l'autre. Il n'y a donc aucune différence à dériver une grandeur par rapport au temps dans un référentiel ou dans l'autre.

$$\left(\frac{d\overrightarrow{v}(M,\mathcal{R}')}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}(M,\mathcal{R}')}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{v_r}$$

- $\left(\frac{d\overrightarrow{v_e}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}(O',\mathcal{R})}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{a}(O',\mathcal{R})$
- L'accélération du point coïncident correspond à $\overrightarrow{a}(P,\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}(O',\mathcal{R})$

Composition des accélérations pour $\mathcal{R}$ en translation

Dans ce cas

♡ - ✍ $$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

♡ $$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e}$$

- Dans ce cas particulier, une base fixe dans le référentiel $\mathcal{R}'$ sera mobile dans le référentiel $\mathcal{R}$.

$$\left(\frac{d\overrightarrow{v}(M,\mathcal{R}')}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \neq \left(\frac{d\overrightarrow{v}(M,\mathcal{R}')}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'}$$

- Le point coïncident a un mouvement circulaire uniforme à l'instant t.
  On lui associe donc l'accélération $\overrightarrow{a_e} = -\Omega^2.\overrightarrow{HM}$
  En effet on considère $HP = C^{te}$ et
  $\overrightarrow{a_e} = \dfrac{\overrightarrow{v}(P,\mathcal{R})}{dt} = \dfrac{HP.\Omega.\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = HP.\Omega.\dfrac{\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -HP.\Omega^2.\overrightarrow{e_r}$
- D'autre part $\dfrac{\overrightarrow{v_e}}{dt} = \dfrac{HM.\Omega.\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = \dfrac{HM}{dt}.\Omega.\overrightarrow{e_\theta} + HM.\Omega.\dfrac{\overrightarrow{e_\theta}}{dt}$

$$\overrightarrow{a_e} \neq \frac{d\overrightarrow{v_e}}{dt}$$

Il semble donc évident que la loi de composition des accélérations doit faire apparaitre un nouveau terme, homogène à une accélération, dont on ne développe pas l'expression dans ce cours mais qui doit être connue.

Soit A un **point fixe** du référentiel d'étude quelconque $\mathcal{R}$ et M le point étudié.

	Loi de composition
Vitesse	$\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}) = \underbrace{\overrightarrow{v}(M \in \mathcal{R}')}_{\overrightarrow{v_r}} + \underbrace{\overrightarrow{v}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\overrightarrow{v_e}}$
Accélération	$\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \underbrace{\overrightarrow{a}(M \in \mathcal{R}')}_{\overrightarrow{a_r}} + \underbrace{\overrightarrow{a}(O'/\mathcal{R}) - \omega^2.\overrightarrow{HM}}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{2.\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_r}}_{\overrightarrow{a_c}}$

La loi de composition pour les accélérations n'est donnée que dans le cas particulier d'une rotation uniforme par rapport à un axe de direction fixe du référentiel $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$.

H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation Δ de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$