Équations de l'électromagnétisme

PC Lycée Dupuy de Lôme

En tout point de l'espace, on considère :

- Une densité volumique de charges $\rho(x,t)$
- Une densité de courants $\overrightarrow{j} = j(x,t).\overrightarrow{e_x}$

On effectue un bilan de charge pendant une durée dt sur un volume délimité par un cylindre de section S situé entre les abscisses x et $x + dx$.

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0$$

Loi de conservation de la charge

Admettant qu'il n'y a ni création ni disparition de charges,

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + div\,\overrightarrow{j}\,(M,t) = 0$$

Conservation du flux

En régime stationnaire, le vecteur densité de courant est conservatif

$$\oiint \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

Cette propriété permet de retrouver la loi de nœuds

Force de Lorentz

Dans un référentiel : Une charge ponctuelle q en M, ayant une vitesse $\overrightarrow{v}(M,t)$ subit de la part du champ électromagnétique $\left[\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t)\right]$ une force

$$\overrightarrow{f} = q.\left[\overrightarrow{E}(M,t) + \overrightarrow{v}(M,t) \wedge \overrightarrow{B}(M,t)\right]$$

Force de Laplace

Un élément $\overrightarrow{dl}$ d'un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité I, avec $\overrightarrow{dl}$ orienté dans le sens conventionnel pris pour I, et placé dans une zone de champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit une force élémentaire

$$\overrightarrow{dF} = I\,\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$$

- Le milieu a des propriétés électromagnétiques (permittivité ϵ_0 et de perméabilité μ_0) **assimilables** à celles du vide.
- M est caractérisé par sa densité volumique de charges ρ et sa densité de courants $\overrightarrow{j}$

Équations de Maxwell

M-Gauss $$div\,\overrightarrow{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}$$

M-Flux $$div\,\overrightarrow{B}(M,t) = 0$$

M-Faraday $$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}(M,t)$$

M-Ampère $$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0\left[\overrightarrow{j}(M,t) + \epsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}(M,t)\right]$$

	Cas statique	Cas général
Éq M-Gauss	$div\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ $\oiint \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$div\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ $\oiint \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
Éq M-Faraday	$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$	$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}(M,t)$ $\overrightarrow{E} \neq -\overrightarrow{grad}V$

Passage aux régimes variables

Dans le cas des régimes variables, le champ électrique ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

On considère un volume élémentaire $d\tau$ avec une densité volumique ρ de charge associée aux porteurs de charges de vitesse $\overrightarrow{v}$.

- La force de Lorentz appliquée à ces porteurs est
- La puissance de cette force est
- On en déduit :

On considère un volume élémentaire $d\tau$ avec une densité volumique ρ de charge associée aux porteurs de charges de vitesse $\overrightarrow{v}$.

- La force de Lorentz appliquée à ces porteurs est

$$d\overrightarrow{f} = \rho.d\tau.(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

- La puissance de cette force est

- On en déduit :

On considère un volume élémentaire $d\tau$ avec une densité volumique ρ de charge associée aux porteurs de charges de vitesse $\overrightarrow{v}$.

- La force de Lorentz appliquée à ces porteurs est

$$d\overrightarrow{f} = \rho.d\tau.(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

- La puissance de cette force est

$$d\mathcal{P} = \rho.d\tau.(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{v} = \rho.d\tau.\left[\overrightarrow{E}.\overrightarrow{v} + \underbrace{(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{v}}_{0}\right]$$

- On en déduit :

On considère un volume élémentaire $d\tau$ avec une densité volumique ρ de charge associée aux porteurs de charges de vitesse $\overrightarrow{v}$.

- La force de Lorentz appliquée à ces porteurs est

$$d\overrightarrow{f} = \rho.d\tau.(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

- La puissance de cette force est

$$d\mathcal{P} = \rho.d\tau.(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{v} = \rho.d\tau.\left[\overrightarrow{E}.\overrightarrow{v} + \underbrace{(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{v}}_{0}\right]$$

- On en déduit :

$$d\mathcal{P} = \rho.\overrightarrow{v}.\overrightarrow{E}.d\tau = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}.d\tau$$

Puissance volumique cédée aux charges

La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux charges en un point M a pour expression

- ✍ $$\mathcal{P}_v = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}$$

Pour un volume V quelconque :

$$\mathcal{P}_{(\overrightarrow{E},\overrightarrow{B})\rightarrow charges} = \iiint_V \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}.d\tau$$

- La puissance volumique cédée aux charges s'écrit
- D'après M-Ampère :
- Donc $\mathcal{P}_V =$
- Comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{b} - div\left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}\right)$
- D'autre part, comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, on en déduit

- La puissance volumique cédée aux charges s'écrit $\mathcal{P}_V = \overrightarrow{j} . \overrightarrow{E}$
- D'après M-Ampère :
- Donc $\mathcal{P}_V =$
- Comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{b} - div\left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}\right)$
- D'autre part, comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, on en déduit

- La puissance volumique cédée aux charges s'écrit
  $\mathcal{P}_V = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}$

- D'après M-Ampère : $\overrightarrow{j} = \dfrac{1}{\mu_0}.\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} - \epsilon_0.\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

- Donc $\mathcal{P}_V =$

- Comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{b} - div\left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}\right)$

- D'autre part, comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, on en déduit

- La puissance volumique cédée aux charges s'écrit $\mathcal{P}_V = \overrightarrow{j}\,.\overrightarrow{E}$
- D'après M-Ampère : $\overrightarrow{j} = \dfrac{1}{\mu_0}.\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} - \epsilon_0.\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$
- Donc $\mathcal{P}_V = \dfrac{1}{\mu_0}.\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}\right).\overrightarrow{E} - \epsilon_0.\overrightarrow{E}.\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$
- Comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{b} - div\left(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{a}\right)$
- D'autre part, comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, on en déduit

- La puissance volumique cédée aux charges s'écrit $\mathcal{P}_V = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}$
- D'après M-Ampère : $\overrightarrow{j} = \dfrac{1}{\mu_0}.\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} - \epsilon_0.\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$
- Donc $\mathcal{P}_V = \dfrac{1}{\mu_0}.\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}\right).\overrightarrow{E} - \epsilon_0.\overrightarrow{E}.\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$
- Comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{b} - div\left(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{a}\right)$
  $\mathcal{P}_V = \dfrac{1}{\mu_0}.\left(\overrightarrow{B}.\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} - div\left(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}\right)\right) - \epsilon_0.\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E^2}{\partial t}$
- D'autre part, comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$, on en déduit

- La puissance volumique cédée aux charges s'écrit $\mathcal{P}_V = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}$
- D'après M-Ampère : $\overrightarrow{j} = \dfrac{1}{\mu_0}.\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} - \epsilon_0.\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$
- Donc $\mathcal{P}_V = \dfrac{1}{\mu_0}.\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B}\right).\overrightarrow{E} - \epsilon_0.\overrightarrow{E}.\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$
- Comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{b} - div\left(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{a}\right)$

  $\mathcal{P}_V = \dfrac{1}{\mu_0}.\left(\overrightarrow{B}.\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} - div\left(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}\right)\right) - \epsilon_0.\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E^2}{\partial t}$
- D'autre part, comme $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, on en déduit

  $\mathcal{P}_V = -div\left(\dfrac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\right) - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{B^2}{2.\mu_0} + \epsilon_0.\dfrac{E^2}{2}\right)$

Les équations locales permettent d'arriver à la relation suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{B^2}{2.\mu_0}+\epsilon_0.\frac{E^2}{2}\right)}_{u_{em}} = -\mathcal{P}_V - div\underbrace{\left(\frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\right)}_{\overrightarrow{\Pi}}$$

Cette relation s'interprète mieux sous sa forme intégrale

$$\iiint_{P\in V}\frac{\partial u_{em}}{\partial t}.d\tau = -\iiint_{P\in V}\mathcal{P}_V.d\tau - \iiint_{P\in V} div\left(\frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\right).d\tau$$

$$\iiint_{P\in V}\frac{\partial u_{em}}{\partial t}.d\tau = -\iiint_{P\in V}\mathcal{P}_V.d\tau - \oiint_{M\in S}\frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}.d\overrightarrow{S}$$

Vecteur de Poynting

La densité surfacique de flux d'énergie électromagnétique est caractérisée par le vecteur de Poynting

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

Énergie électromagnétique volumique

On associe au champ électromagnétique une énergie volumique

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2}.E^2 + \frac{1}{2.\mu_0}.B^2$$

On peut rappeler l'expression d'un bilan énergétique en conduction thermique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div\,\overrightarrow{j} = \mathcal{P}_{cree}$$

Équation locale de Poynting

Le bilan énergétique est traduit au niveau local par la relation :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + div\,\overrightarrow{\Pi} = -\mathcal{P}_v$$

Symétrie pour la distribution de charge et courants

Les plans de symétrie ou d'anti-symétrie doivent l'être à la fois pour les distributions de charges et de courants
Les propriétés de symétrie sont alors identiques à celles énoncées dans le cas statique

Phénomènes de retard

Le champ électrique est régit par une équation de propagation à une vitesse proche de c. Les interactions ne seront donc pas des phénomènes instantanés, les variations des caractéristiques des sources se ressentant avec un certain retard en un point M de l'espace.

ARQS

Pour des régimes lentement variables, on pourra négliger les temps propagation devant les temps caractéristiques des évolutions imposées par les sources.

Condition de l'ARQS

On pourra considérer l'ARQS si

- ✍

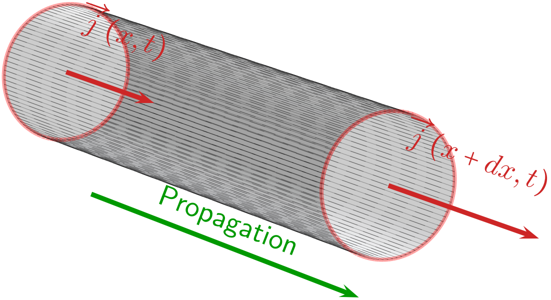
$$L << c.T$$

Ordres de grandeur de l'ARQS

Fréquence	Longueur d'onde	Dimensions max.
EDF : $N = 50\ Hz$	$\lambda = 6000\ km$	
Ordinateur : $N = 1\ GHz$	$\lambda = 30\ cm$	

Ordres de grandeur de l'ARQS

Fréquence	Longueur d'onde	Dimensions max.
EDF : $N = 50\ Hz$	$\lambda = 6000\ km$	$r_{max} = 100\ km$
Ordinateur : $N = 1\ GHz$	$\lambda = 30\ cm$	$r_{max} = 1\ cm$



Densité de courant à flux conservatif

On néglige les retards dus à la propagation dans l'A.R.Q.S., ce qui a pour conséquence

$$div\,\vec{j} = 0 \xrightarrow{\texttt{Cons. de la charge}} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ARQS magnétique

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, les effets des distributions de courant sont très supérieures aux effets des distributions de charge.

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \underbrace{\mu_0.\,\overrightarrow{j}}_{\text{Effet}} + \underbrace{\mu_0.\epsilon_0.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}}_{\text{Effet}}$$

ARQS magnétique

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, les effets des distributions de courant sont très supérieures aux effets des distributions de charge.

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \underbrace{\mu_0 . \overrightarrow{j}}_{\text{Effet des courants}} + \underbrace{\mu_0 . \epsilon_0 . \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}}_{\text{Effet des charges}}$$

ARQS magnétique

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, les effets des distributions de courant sont très supérieures aux effets des distributions de charge.

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \underbrace{\mu_0 . \overrightarrow{j}}_{\text{Effet des courants}} + \underbrace{\mu_0 . \epsilon_0 . \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}}_{\text{Effet des charges}}$$

Courants de conduction et de déplacement

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, les courants de déplacement sont négligeables **devant** les courants de conduction.

$$\epsilon_0 . \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \ll \overrightarrow{j}$$

Toutes les grandeurs dépendent des coordonnées du point M ainsi que du temps.

Équations de Maxwell dans l'ARQS magnétique

M-Gauss	$div\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$
M-Flux	$div\,\overrightarrow{B} = 0$
M-Faraday	$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$
M-Ampère	$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 . \overrightarrow{j}$

M-Ampère $\qquad \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0.\,\overrightarrow{j}$

On retrouve une équation locale identique au cas statique.

Théorème d'Ampère dans l'ARQS magnétique

Le calcul des champs magnétique sera analogue au cas particulier de la magnétostatique, en remplaçant I par $i(t)$

 - ✍

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 . i_{entr.}(t)$$

Énergie magnétique

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, la forme d'énergie magnétique sera prédominante devant la forme d'énergie électrique

$$u_{em} \equiv \frac{1}{2.\mu_0}.B^2$$

On part de $\begin{cases} \text{L'équation de Maxwell-Gauss : } div\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{La loi d'Ohm locale : } \overrightarrow{j} = \gamma.\overrightarrow{E} \end{cases}$, ce qui permet d'écrire

$$div\,\overrightarrow{j} = \frac{\gamma\rho}{\epsilon_0}$$

Or l'équation locale de conservation de la charge est $div\,\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ ce qui donne

$$\frac{\gamma}{\epsilon_0}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

En posant $\tau = \dfrac{\epsilon_0}{\gamma}$ on en déduit la loi d'évolution de la charge dans le conducteur

$$\rho(t) = \rho_0.e^{\dfrac{t_0 - t}{\tau}}$$

Or pour les conducteurs, $\gamma > 10^4$ ce qui donne $\tau < 10^{-14}\ s$.