Champ électrostatique

PC Lycée Dupuy de Lôme

Description d'une distribution de charges statique

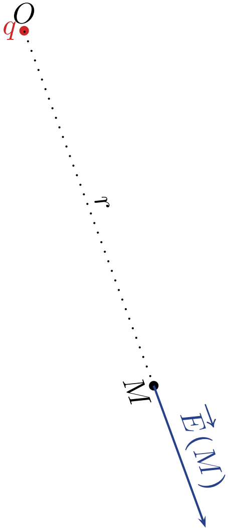
La distribution de charges pourra être ponctuelle, linéïque, surfacique ou volumique.

- Charge ponctuelle : q placée en P
- Répartition linéïque :
  Pour un él^{lt} $dl(P)$ de la courbe de dens. linéïque de charge $\lambda(P)$:
  $$dq(P) = \lambda(P).dl(P)$$
- Répartition surfacique :
  Pour un él^{lt} $dS(P)$ de la surface de dens. surfacique de charge $\sigma(P)$:
  $$dq(P) = \sigma(P).dS(P)$$
- Répartition volumique :
  Pour un él^{lt} $d\tau(P)$ du volume de dens. volumique de charge $\rho(P)$:
  $$dq(P) = \rho(P).d\tau(P)$$

Champ électrostatique

Une distribution de charges crée en un point M de l'espace un champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ tel que l'action de cette distribution sur une charge q' placée en M a pour expression

$$\overrightarrow{F} = q'.\overrightarrow{E}(M)$$



Loi de Coulomb

Une charge ponctuelle q en O crée en M un champ électrique

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4.\pi.\epsilon_0}.\frac{q}{OM^3}.\overrightarrow{OM}$$

$\epsilon_0 = \dfrac{1}{4.\pi.10^9}\ S.I$: *permittivité du vide*

Équations locales en électrostatique

Un tout point M où la densité volumique de charge est $\rho(M)$, le champ électrique vérifie les équations locales :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \qquad div\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

- Pour l'opérateur rotationnel : $\iint_S \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{dl}$
- Pour l'opérateur gradient : $\overrightarrow{grad}A \cdot \overrightarrow{dl} = dA$

Potentiel électrostatique

Le champ électrostatique dérive d'un potentiel tel que

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

Une charge q' est placée dans une zone de champ $\overrightarrow{E}(M)$ et se déplace.

- Travail de la force :
- Énergie potentielle pour la charge :

Une charge q' est placée dans une zone de champ $\overrightarrow{E}(M)$ et se déplace.

- Travail de la force : $W_{A\frown B} = \int_{A\frown B} q'.\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl}$
- Énergie potentielle pour la charge :

Une charge q' est placée dans une zone de champ $\overrightarrow{E}(M)$ et se déplace.

- Travail de la force :
- Énergie potentielle pour la charge : $\mathcal{E}_p(M) = q'.V(M)$

Une charge q' est placée dans une zone de champ $\overrightarrow{E}(M)$ et se déplace.

- Travail de la force :
- Énergie potentielle pour la charge :

Circulation conservative

Le champ $\overrightarrow{E}(M)$ est à circulation conservative, la force électrostatique dérive donc d'une énergie potentielle.

$$\mathcal{E}_p(M) = q'.V(M)$$

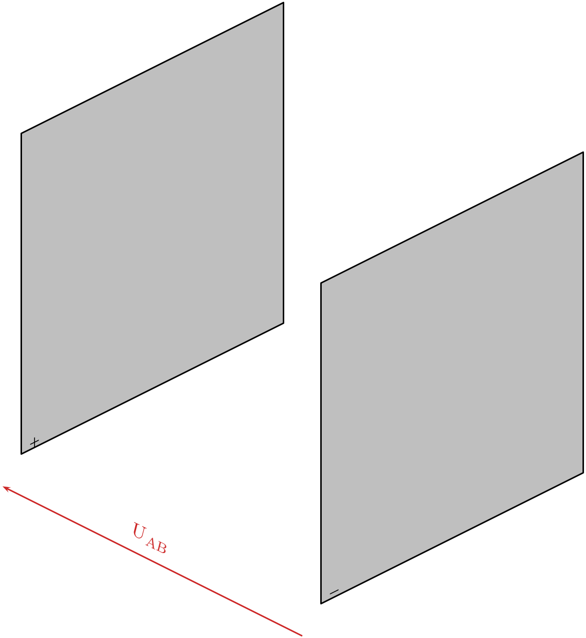
ligne de champ

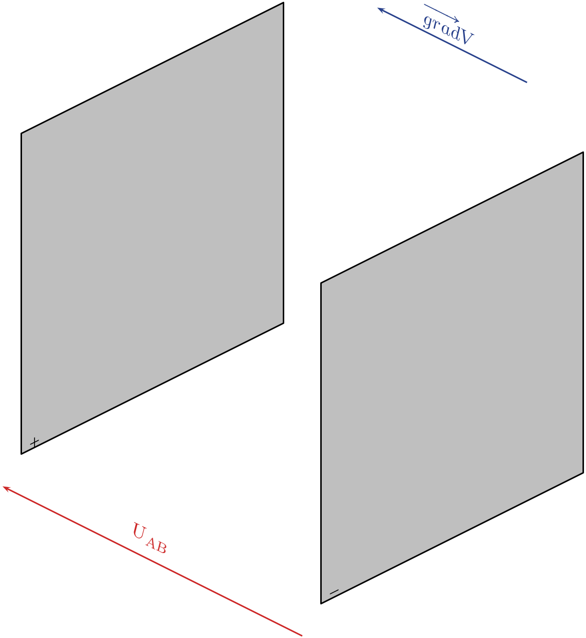
Tout déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ le long d'une ligne de champ est colinéaire au champ électrique en M, $\overrightarrow{E}(M)$

$$\overrightarrow{E}(M) = \alpha.\overrightarrow{dOM} \quad \texttt{ou} \quad \overrightarrow{E}(M) \wedge .\overrightarrow{dOM} = 0$$

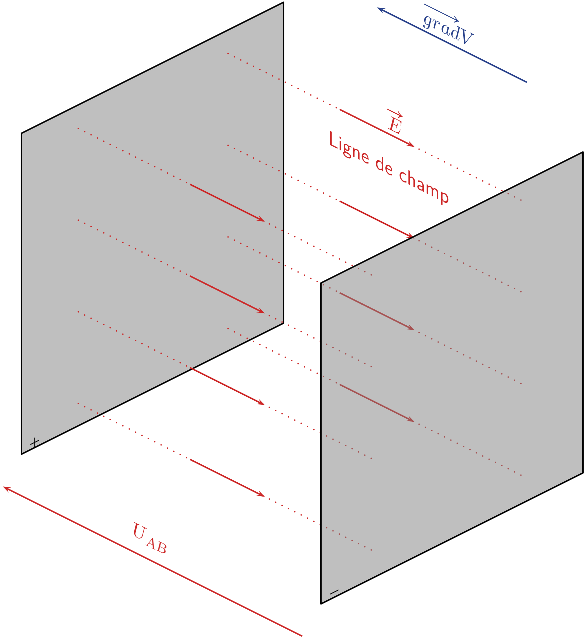
Équipotentielle

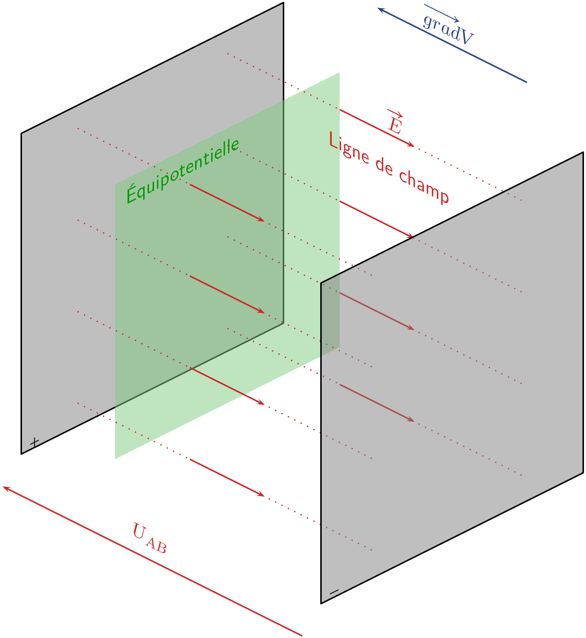
L'ensemble des points de même potentiel forme une surface équipotentielle


+
−
U_{AB}

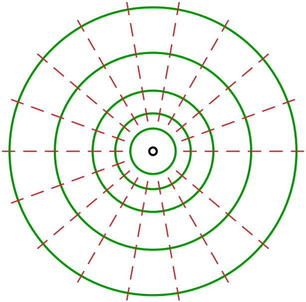


$\overrightarrow{\text{grad}V}$
+
−
U_{AB}


$\overrightarrow{gradV}$
$\vec{E}$
Ligne de champ
+
−
U_{AB}



$\overrightarrow{gradV}$
$\vec{E}$
Ligne de champ
Équipotentielle
+
−
U_{AB}



Lignes de champ électrique

Les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles, orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Topographie

Les lignes de champ électrique sont nécessairement ouvertes

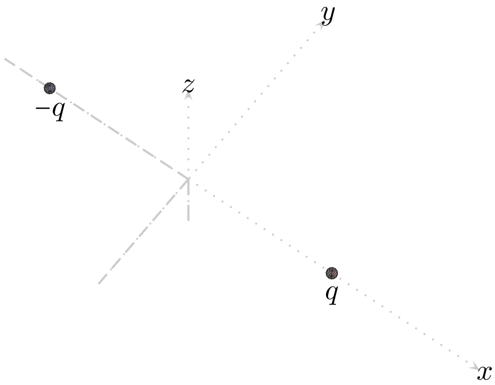
Principe de Curie

Le conséquences ont au moins les symétries de la cause ;

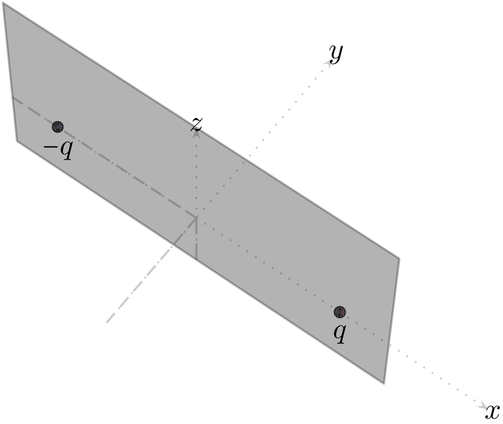
- **Cause :** distribution des charges aux points $P \in$ distribution
- **Conséquence :** Force électrostatique exercée sur une charge test placée en M

Champ symétrique

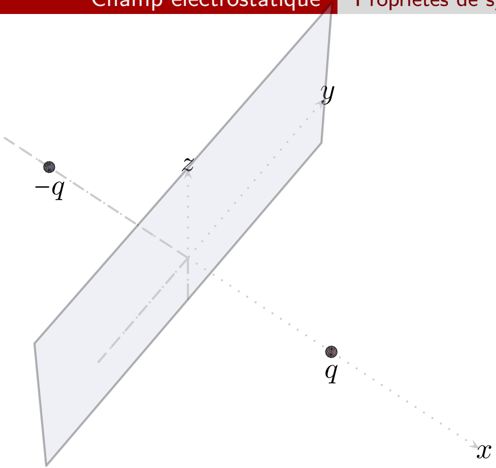
Comme le champ $\overrightarrow{E}$ et la force électrostatique $\overrightarrow{F} = q.\overrightarrow{E}$ sont colinéaires, le champ électrique crée par une distribution de charges aura donc les mêmes symétries que la distribution.

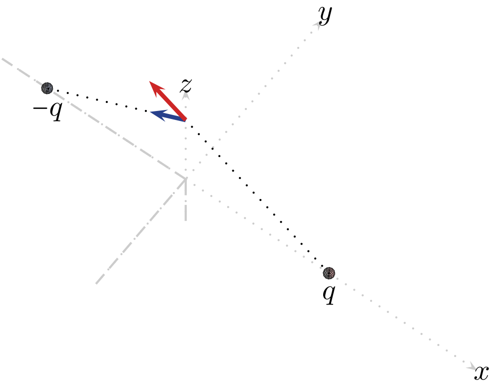


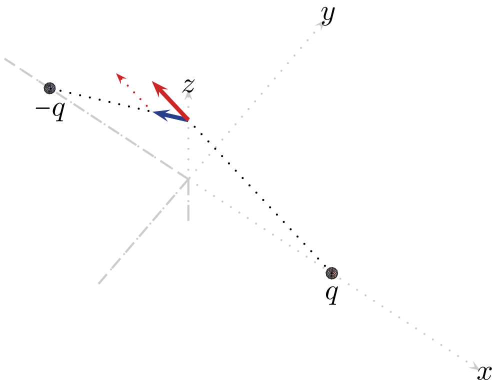
y
z
$-q$
q
x

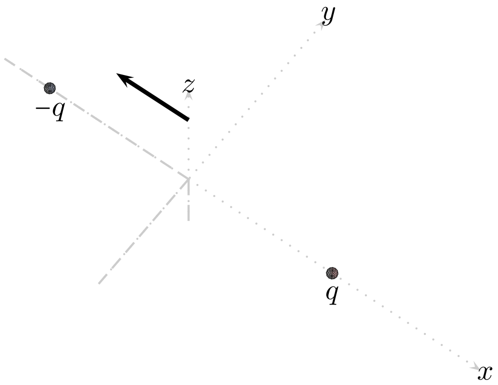


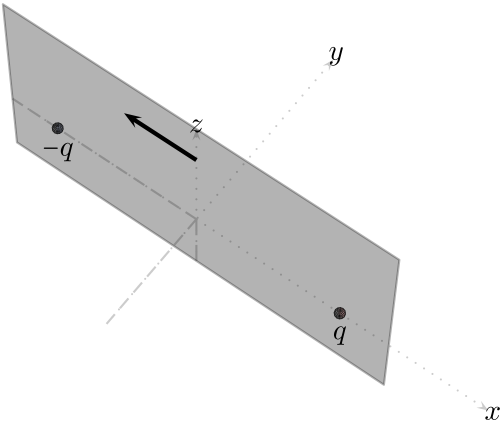
y
z
$-q$
q
x


y
z
$-q$
q
x


y
z
$-q$
q
x

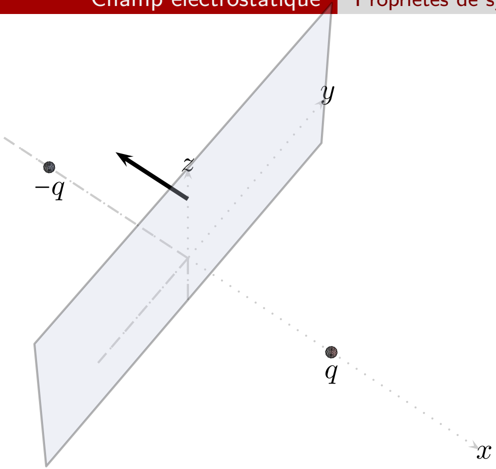

y
z
$-q$
q
x


y
z
$-q$
q
x



Propriétés de symétries

- Si $M \in \Pi_{sym}$, alors $\overrightarrow{E}(M) \in \Pi_{sym}$



Propriétés de symétries

- Si $M \in \Pi_{sym}$, alors $\overrightarrow{E}(M) \in \Pi_{sym}$
- Si $M \in \Pi_{anti-sym}$, alors $\overrightarrow{E}(M) \perp \Pi_{sym}$

Invariance par translation

Si la distribution est invariante pour un observateur par translation colinéairement à une direction $\overrightarrow{u}$, l'intensité du champ électrique sera indépendante de la coordonnée $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u}$

Invariance par rotation

Si la distribution est invariante pour un observateur par rotation par rapport à un axe Δ d'un angle θ, l'intensité du champ électrique sera indépendante de la coordonnée θ

> Il sera important de choisir un système de coordonnées en fonction des invariances de la distribution.

- Forme intégrale de $div\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$:

- Avec le théorème de Green-Ostrogradski :

Theorème de Gauss

Le flux sortant de $\overrightarrow{E}$ à travers une surface fermée S enfermant une charge Q_{int} est tel que

$$\Phi_E = \iint_{P\in S} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS_P} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- Forme intégrale de $div\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$:

$$\iiint_{M\in V} div\overrightarrow{E}(M).d\tau_M = \iiint_{M\in V} \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}.d\tau_M$$

- Avec le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\Phi_E = \iint_{P\in S} div\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS_P} = \iiint_{M\in V} \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}.d\tau_M$$

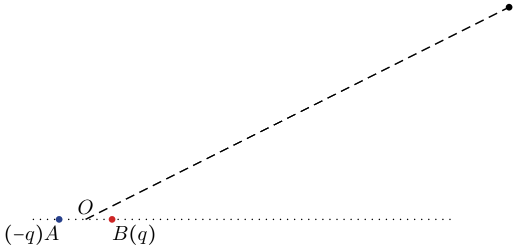
Theorème de Gauss

Le flux sortant de $\overrightarrow{E}$ à travers une surface fermée S enfermant une charge Q_{int} est tel que

$$\Phi_E = \iint_{P\in S} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS_P} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Déterminer le champ crée en M avec le théorème de Gauss :

- La distribution doit avoir les symétries et invariances suffisantes
- Le choix de la surface de Gauss se fait en fonction des symétries de la distribution. Elle doit contenir le point M
- Calculer le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers la surface fermée choisie
- Repérer et calculer la charge à l'intérieur de cette surface.



Dipôle et Approximation dipolaire

Deux charges opposées $-q$ et A et q en B constituent un dipôle électrostatique dont le moment dipolaire, exprimé en Debye, est

$$\overrightarrow{p} = q.\overrightarrow{AB}$$

On se placera dans l'approximation dipolaire $OM \gg AB$

- Principe de superposition :
- Dans l'approximation dipôlaire :

$AM^2 =$

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{AM} =$$

- De même

- Principe de superposition : $V(M) = \dfrac{-q}{4.\pi.\epsilon_0.AM} + \dfrac{q}{4.\pi.\epsilon_0.BM}$
- Dans l'approximation dipôlaire :

$AM^2 =$

$\longrightarrow \quad \dfrac{1}{AM} =$

- De même

- Principe de superposition : $V(M) = \dfrac{-q}{4.\pi.\epsilon_0.AM} + \dfrac{q}{4.\pi.\epsilon_0.BM}$
- Dans l'approximation dipôlaire :

$$\begin{aligned} AM^2 = \quad & AO^2 + OM^2 + 2.\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} \\ & \frac{a^2}{4} + r^2 + r.a.cos\theta \\ & r^2.\left(1 + \frac{a}{r}.cos\theta\right) \qquad \longrightarrow \quad \frac{1}{AM} = \end{aligned}$$

- De même

- Principe de superposition : $V(M) = \dfrac{-q}{4.\pi.\epsilon_0.AM} + \dfrac{q}{4.\pi.\epsilon_0.BM}$
- Dans l'approximation dipôlaire :

$$\begin{aligned} AM^2 = \quad & AO^2 + OM^2 + 2.\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} \\ & \frac{a^2}{4} + r^2 + r.a.cos\theta \\ & r^2.\left(1 + \frac{a}{r}.cos\theta\right) \qquad \longrightarrow \quad \frac{1}{AM} = \frac{1}{r}.\left(1 - \frac{a}{2.r}.cos\theta\right) \end{aligned}$$

- De même

- Principe de superposition : $V(M) = \dfrac{-q}{4.\pi.\epsilon_0.AM} + \dfrac{q}{4.\pi.\epsilon_0.BM}$
- Dans l'approximation dipôlaire :

$$\begin{aligned} AM^2 = \quad & AO^2 + OM^2 + 2.\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM} \\ & \frac{a^2}{4} + r^2 + r.a.cos\theta \\ & r^2.\left(1 + \frac{a}{r}.cos\theta\right) \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{AM} = \frac{1}{r}.\left(1 - \frac{a}{2.r}.cos\theta\right)$$

- De même $\dfrac{1}{BM} = \dfrac{1}{r}.\left(1 + \dfrac{a}{2.r}.cos\theta\right)$

- Principe de superposition : $V(M) = \dfrac{-q}{4.\pi.\epsilon_0.AM} + \dfrac{q}{4.\pi.\epsilon_0.BM}$
- Dans l'approximation dipôlaire :

$$\begin{aligned} AM^2 = \quad & AO^2 + OM^2 + 2.\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM} \\ & \frac{a^2}{4} + r^2 + r.a.cos\theta \\ & r^2.\left(1 + \frac{a}{r}.cos\theta\right) \qquad \longrightarrow \quad \frac{1}{AM} = \frac{1}{r}.\left(1 - \frac{a}{2.r}.cos\theta\right) \end{aligned}$$

- De même $\dfrac{1}{BM} = \dfrac{1}{r}.\left(1 + \dfrac{a}{2.r}.cos\theta\right)$

Potentiel crée par un dipôle

Dans l'approximation dipôlaire, le potentiel crée en $M(r,\theta,\varphi)$ par un dipôle placé en O a pour expression :

$$V(M) = \frac{p.cos\theta}{4.\pi.\epsilon_0.r^2}$$

- Relation champ-potentiel :

- Relation champ-potentiel : $\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$
- $\overrightarrow{grad}A(r,\theta) = \dfrac{\partial A}{\partial r}.\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A}{\partial \theta}.\overrightarrow{e_\theta}$

  Pour le potentiel :

  $\dfrac{\partial A}{\partial r} =$

  $\dfrac{\partial A}{\partial \theta} =$

- Relation champ-potentiel : $\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$
- $\overrightarrow{grad}A(r,\theta) = \dfrac{\partial A}{\partial r}.\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A}{\partial \theta}.\overrightarrow{e_\theta}$

  Pour le potentiel :

  $$\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{2.p.cos\theta}{4.\pi.\epsilon_0.r^3}$$

  $$\frac{\partial A}{\partial \theta} = -\frac{p.sin\theta}{4.\pi.\epsilon_0.r^2}$$

- Relation champ-potentiel : $\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$
- $\overrightarrow{grad}A(r,\theta) = \frac{\partial A}{\partial r}.\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}.\overrightarrow{e_\theta}$

  Pour le potentiel :

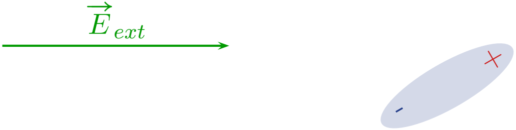
  $$\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{2.p.cos\theta}{4.\pi.\epsilon_0.r^3}$$

  $$\frac{\partial A}{\partial \theta} = -\frac{p.sin\theta}{4.\pi.\epsilon_0.r^2}$$

Champ électrique crée par un dipôle

On déduit de l'expression du potentiel dans l'approximation dipolaire :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{p.cos\theta}{4.\pi.\epsilon_0.r^3}.\left(2.cos\theta.\overrightarrow{e_r} + sin\theta.\overrightarrow{e_\theta}\right)$$



Position initiale du dipôle

Action d'un champ extérieur uniforme sur un dipôle

On considère un champ extérieur uniforme dans la zone du dipôle. Pour le dipôle placé en M, on aura :

$$\textbf{Moment: } \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_{ext}$$

$$\textbf{Résultante: } \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

$$\textbf{Énergie potentielle: } E_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}_{ext}$$

Action d'un champ extérieur uniforme sur un dipôle

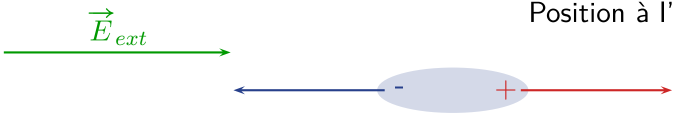
On considère un champ extérieur uniforme dans la zone du dipôle. Pour le dipôle placé en M, on aura :

$$\textbf{Moment: } \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_{ext}$$

✍ $$\textbf{Résultante: } \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

$$\textbf{Énergie potentielle: } E_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}_{ext}$$

Position à l'équilibre du dipôle



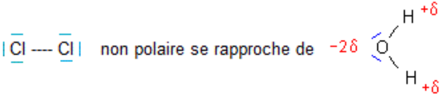
Action d'un champ extérieur uniforme sur un dipôle

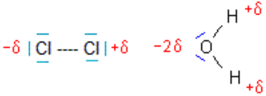
On considère un champ extérieur uniforme dans la zone du dipôle. Pour le dipôle placé en M, on aura :

$$\texttt{Moment:}\quad \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_{ext}$$

✍ $$\texttt{Résultante:}\quad \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

$$\texttt{Énergie potentielle:}\quad E_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}_{ext}$$



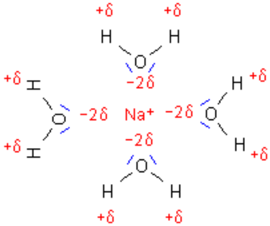


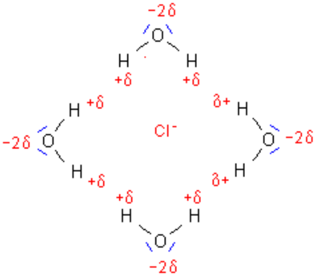
Dipôle induit

Polarisabilité

Sous l'action d'un champ électrique $\overrightarrow{E}_{ext}$, des atome ou molécule non polaires acquièrent un moment dipolaire $\overrightarrow{p}$. On définit la polarisabilité α de l'atome ou de la molécule telle que

$$\overrightarrow{p} = \epsilon_0 . \alpha . \overrightarrow{E}_{ext}$$





Solvatation