Mécanique du point dans un référentiel galiléen

1 Interactions

1.1 Modéliser une interaction

Force et moment de la force

On associe à l'action d'un élément extérieur sur un système ponctuel M une force $\vec{F}$ dont

- une force $\vec{F}$ | de norme proportionnelle à l'intensité de l'interaction ; de sens celui de l'interaction. Unité : Newton (N)
- un moment par rapport à O : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

Une force est indépendante du référentiel d'étude.

Travail et puissance d'une force Le travail d'une force au cours d'un déplacement du point M le long de la courbe AB s'écrit

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \int_{A \frown B} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} \text{ Unité : Joules (J)}}$$

La puissance d'une force est telle que : $\boxed{\mathcal{P} = \left(\frac{\delta W}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M, \mathcal{R})}$

Force conservative

Une force est dite conservative s'il existe un potentiel E_p tel que $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$. Soit

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)}$$

Champ de Forces

Pour des interactions à distance, on peut déterminer un champ de force $\vec{\alpha}(M)$ en tout point P de l'espace, tel que pour un système ponctuel placé en M, il subisse une force $\vec{F} = k.\vec{\alpha}(M)$

Exemple : Champ de pesanteur $\vec{g}$. Le coefficient k est alors la masse m : $\vec{P} = m.\vec{g}$

1.2 Exemple de forces

On considère un point M matériel de masse m et de charge q et O l'origine du repère.

Forces Newtoniennes : $\boxed{\vec{F} = K.\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}}$

Exemples de forces Newtoniennes appliquées à M :

- Par une masse m_0 placée en O : $\vec{F} = -G\frac{m.m_0}{OM^3}\overrightarrow{OM}$ (force gravitationelle)
- Par une charge q_0 placée en O : $\vec{F} = \frac{1}{4.\pi.\epsilon_0}\frac{q.q_0}{OM^3}\overrightarrow{OM}$ (force électrostatique)

Tension exercée par un fil inextensible Le fil attaché à M et tendu exerce une force

- Dans la direction du fil
- Dirigée vers le fil

dupuydelome.fr - PC Lo

Force de rappel du ressort Un ressort de raideur k et de longueur à vide $|AM_0|$ exerce sur le point M à son extrémité, A étant l'autre extrémité du ressort, une force de rappel

$$\boxed{\vec{F} = -k.\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_0}\right)}$$

2 Grandeurs cinétiques

Ces grandeurs dépendent du référentiel.

Quantité de mouvement	Énergie cinétique	Moment cinétique en O
$\vec{p}(M,\mathcal{R}) = m.\vec{v}(M,\mathcal{R})$	$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}.m.v^2(M,\mathcal{R})$	$\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M,\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m.\vec{v}(M,\mathcal{R})$

3 Étude dynamique d'un système ponctuel

3.1 Choix du référentiel

Il existe une classe de référentiels, dits galiléens, dans lesquels un système isolé a une trajectoire rectiligne uniforme

- Le référentiel de Corpenic (Origine : centre du soleil, axes dirigés selon trois étoiles éloignées) est considéré comme Galiléen
- Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

3.2 Théorèmes fondamentaux

3.2.1 Dans un référentiel galiléen

Pour un système supposé ponctuel M de masse m, étudié dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, avec un point O fixe de ce référentiel :

Principe fondamental de la dynamique : $$\boxed{\frac{d\vec{p}(M,\mathcal{R})}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}}$$

Théorèmes des Énergie ou puissance On décompose les forces extérieures en forces conservatives et non conservatives : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \sum \overrightarrow{F_c} + \sum \overrightarrow{F_{nc}}$
L'énergie mécanique d'un système est la somme de son énergie cinétique et de l'ensemble des énergies potentielles dont dérivent les forces conservatives

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p(tot)}}$$

Les théorèmes issus d'une étude énergétique :

à partir de l'énergie cinétique	à partir de l'énergie mécanique	Utilisation
$E_{cB} - E_{cA} = \int_{A\frown B}\left(\sum \delta W(\overrightarrow{F_{ext}})\right)$	$E_{mB} - E_{mA} = \int_{A\frown B}\left(\sum \delta W(\overrightarrow{F_{nc}})\right)$	Relier des caractéristiques de A et B
$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{ext}})$	$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{nc}})$	Obtenir l'équation du mouvement

Théorème du moment cinétique : $$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\sigma_{/0}}(M,\mathcal{R})}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$

dupuydelome.fr - PC Lo

Quel théorème choisir ?

- Pour un système à un degré de liberté, les théorèmes énergétiques sont efficaces
- Pour un système en rotation ou soumis à des forces centrales, le théorème du moment cinétique peut être utilisé
- Si aucun des deux ne semble approprié, on appliquera le PFD.

4 Équilibre et stabilité

Définitions

- Une position d'équilibre est telle que pour un point placé sans vitesse en cette position, il reste immobile
- L'équilibre est stable si une petite perturbation provoque un mouvement d'oscillation du système autour de la position d'équilibre

Propriétés

- À l'équilibre, $\boxed{\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right)_{M_{\text{éq}}} = \vec{0}}$
- Pour un système conservatif à un degré de liberté de paramètre u, on a :
  - La position d'équilibre tel que $\boxed{\left(\dfrac{dE_p}{du}\right)_{\text{éq}} = 0}$
  - Un équilibre stable si $\boxed{\left(\dfrac{d^2E_p}{du^2}\right)_{\text{éq}} > 0}$

5 Mouvements à force centrale

5.1 Propriétés générales

Définitions

- Dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'étude où O est un point fixe, le mouvement est à force centrale si la résultante des forces extérieures s'écrit sous la forme $\vec{R} = -k.\overrightarrow{OM}$
- Cette force est Newtonienne s'il elle s'écrit sous la forme $\vec{R} = \dfrac{k}{OM^3}.\overrightarrow{OM}$

Propriétés d'un mouvement à force centrale

- $\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{/0}}(M,\mathcal{R})}{dt} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{\sigma_{/0}}(M,\mathcal{R}) = \overrightarrow{C^{te}}$: $\boxed{\text{Le mouvement est plan}}$
- Loi des aires : Le rayon-vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales pendant des durées égales. On définit la constante des aires C telle que $\boxed{\sigma_{/0}(M,\mathcal{R}) = m.C}$

5.2 Mouvement des planètes

On utilise les coordonnées polaires et la base associée. Le système étudié, supposé ponctuel, est soumis à une force Newtonienne de type gravitationnelle. On considère le centre de force (l'étoile) de masse M fixe dans le référentiel galiléen d'étude.

nouvdelorme.fr - PC Lo

Énergie potentielle effective

On définit E_{peff} tel que $$\boxed{E_m = \frac{1}{2}.m.\dot{r}^2 + E_{peff}}$$

Les développements calculatoires (à savoir faire) permettent de déduire l'expression $E_{peff} = \frac{1}{2}.m.\frac{C^2}{r^2} - \frac{G.M.m}{r}$

Tout système d'énergie mécanique négative sera lié au centre de force.

5.3 Différentes trajectoires

Cas général

L'équation de la trajectoire sera fournie dans tout problème.

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e.cos(\theta)} \text{ avec } \left|\begin{array}{ll} e & \text{excentricité} \\ p = \dfrac{C^2}{G.M} & \text{paramètre de la conique} \end{array}\right.}$$

L'état lié correspond ici à $e < 1$, à rapprocher du résultat précédent $E_m < 0$. La trajectoire est alors elliptique

Trajectoires elliptiques

Principe d'étude : savoir retrouver les relations dans le cas particulier des trajectoires circulaires de rayon r puis généraliser aux trajectoires elliptiques en substituant le demi grand axe a à r.

- $3^{ième}$ loi de Kepler : $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M}}$
- Énergie mécanique $\boxed{E_m = \frac{-G.M.m}{2.a}}$

dupuydelome.fr - PC Lo